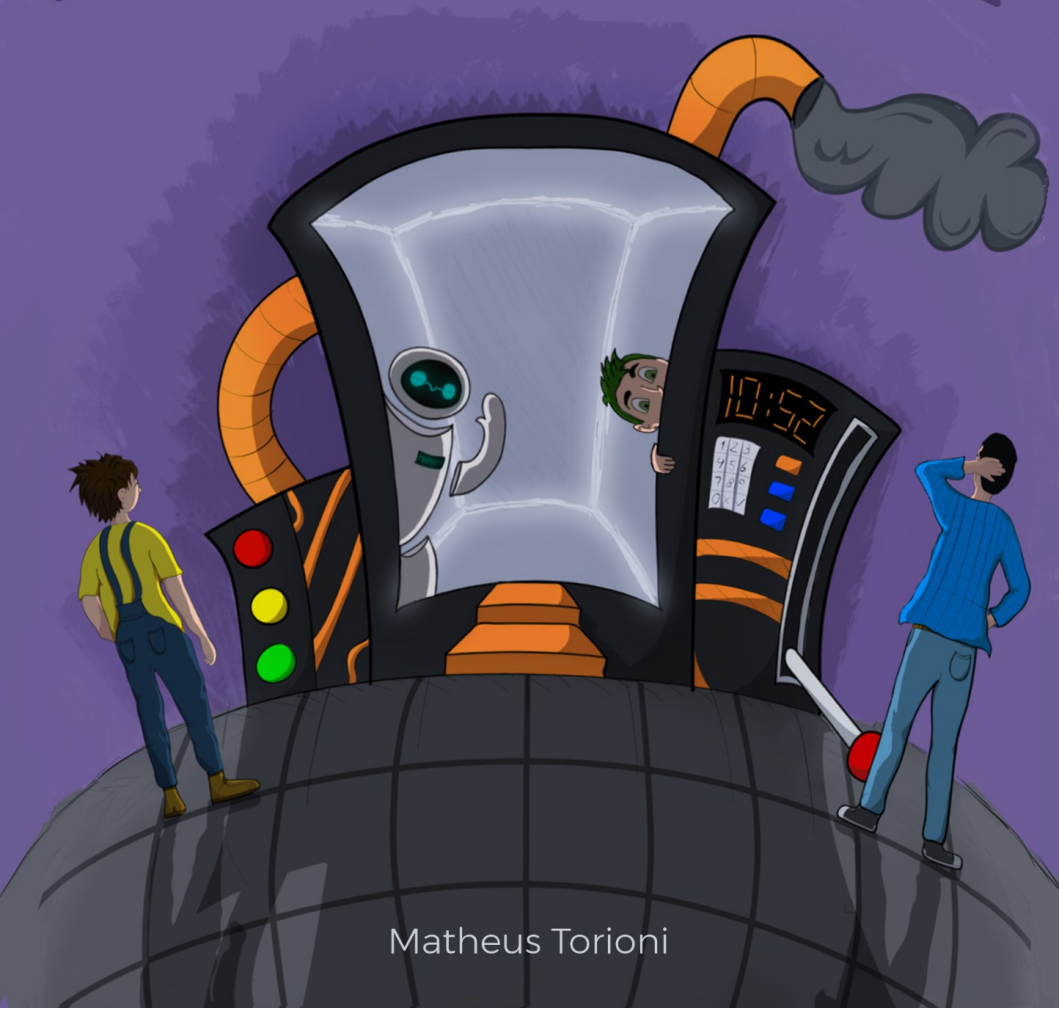
UMA ILUSÃO MATEMÁTICA



Matheus Torioni

UMA ILUSÃO MATEMÁTICA

Matheus Torioni Rodrigues

Virgínia Cardia Cardoso

Elaine Caire

Universidade Federal do ABC

Santo André, 2021.

CATALOGAÇÃO NA FONTE
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
Elaborado por Helen de Almada Zepelim – CRB-8/10376

R696i

Rodrigues, Matheus Torioni

Uma ilusão matemática [recurso eletrônico] / Matheus Torioni Rodrigues, Virgínia Cardia Cardoso e Elaine Caire ; [ilustração Leonardo Tosco]. — Santo André, SP : Universidade Federal do ABC, 2021.

146 p. : il.

ISBN: 978-65-00-44703-3

1. História da matemática. 2. Trigonometria – Estudo e Ensino. 3. Ensino Médio. 4. Ficção (gênero). 5. Fantasia (gênero). I. Cardoso, Virgínia Cardia. II. Caire, Elaine.

Autor: Matheus Torioni Rodrigues
Autor: Virgínia Cardia Cardoso
Autor: Elaine Caire
Capa e ilustrações: Leonardo Tosco

Todos os direitos reservados

Agradecimentos

Agradeço à UFABC, por ter me dado a oportunidade de realizar esse trabalho financiado com uma bolsa de estudos, sem a qual o trabalho não poderia ter sido desenvolvido.

À Prof.ª Dr.ª Virginia Cardoso pela orientação, por ter me ajudado neste projeto, seja corrigindo minhas pesquisas, enviando materiais para estudo e por ter disponibilizado seu tempo.

À Prof.ª Dr.ª Elaine Caire, que atuou como coorientadora deste trabalho, me auxiliando com correções e pesquisas, dispondo de seu tempo para isso.

Ao Leonardo Tosco, por ter ilustrado o livro, e por me ajudar durante essa trajetória.

À Regina Carneiro, por ter me incentivado a começar esse projeto, e por ter ficado ao meu lado durante o desenvolvimento.

Agradeço também a todos aqueles que me ajudaram tanto com ideias literárias, ou por ficarem ao meu lado durante a escrita deste trabalho.

Sumário

Apresentação 9

I. Estranha ilusão 11

II. Amigo metalizado 27

III. O teorema foi roubado? 45

IV. A verdade sobre a Terra 69

V. Um novo... amigo? 85

VI. Salão histórico 103

VII. A história se repete... 131

Apresentação

É inegável a importância do conhecimento histórico para a nossa compreensão do mundo atual, porém isso não é explicitado em todas as disciplinas acadêmicas estudadas em nossa vida escolar. Esse livro foi escrito como o produto de uma Iniciação Científica realizada na Universidade Federal do ABC (UFABC), no Programa "Pesquisando Desde o Primeiro Dia" (PDPD), pelo edital de 2020, cujo objetivo foi explorar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática em um material didático para o Ensino Médio.

O objetivo deste livro é mostrar uma possibilidade de contextualizar o desenvolvimento do conhecimento matemático na História da Matemática, partindo da premissa que tal contextualização facilita o ensino desta disciplina para alunos do Ensino Médio.

O tema do livro é a trigonometria porque é fácil encontrarmos alunos do Ensino Médio que apresentam dificuldades neste assunto. No geral, os alunos o consideram um bicho de sete cabeças, pelo fato de sua apresentação em classe ser muito superficial,

privilegiando fórmulas e resultados, sem explicação dos porquês de cada conceito, propriedade ou desenvolvimento. A intenção dos autores é que, ao descobrir as etapas históricas do desenvolvimento de alguns conceitos trigonométricos, os alunos tenham oportunidade de mudar sua opinião a respeito desta teoria matemática e ao aprofundar seus conhecimentos, percebam que a Matemática é um conhecimento importante para a compreensão de mundo e muito útil nas situações cotidianas.

Esse livro busca explicar da forma mais simples, como a trigonometria surgiu, mostrando o contexto histórico e as dificuldades que os matemáticos do passado tiveram. Traz também algumas atividades que os alunos deste nível escolar poderão desenvolver com materiais manipulativos, para perceber as aplicações da trigonometria em situações cotidianas.

I. Estranha ilusão

Em uma nublada manhã de domingo, quando Luca acordou, foi direto pegar seu celular, abrir suas redes sociais – afinal, o que mais um jovem de 14 anos do século XXI poderia fazer? – quando viu uma mensagem de seu tio Túlio, que não causou estranheza pois era algo corriqueiro em sua vida. O texto dizia:

"Luca, quando puder, venha aqui na minha casa, onde estou trabalhando em uma nova invenção e preciso de sua ajuda para testá-la."

Com toda a sua curiosidade para saber o que seu tio tinha inventado agora, e também para ver mais uma explosão de seus fracassos com essa invenção, levantou e foi arrumar algo para comer no café da manhã. Vestiu-

se com roupas confortáveis, colocando um macacão jeans e uma camisa amarela, penteou o cabelo de uma forma que não ficou nenhum pouco penteado, e foi ao encontro do seu tio, que não era tão longe, por serem vizinhos. Chegando lá, disse:

— Oi tio, o que você inventou agora? Vai explodir como aquele mexedor de ovos automático?

— Essa não vai explodir! – disse Túlio, seu tio – inventei algo que vai revolucionar a ciência moderna: uma simuladora de ilusões! Com ela podemos ir para qualquer lugar e ver qualquer coisa, reproduzindo o que aconteceu baseado nos dados históricos que possuímos, de uma forma bem mais divertida do que ler longos livros de histórias.

— E ela realmente funciona? – indagou Luca – Nada vai realmente explodir? Queria tanto ver alguma explosão...

— Pelos meus cálculos, ela não vai explodir, mas, quer fazer as honras? – disse Túlio apontando para uma alavanca.

Sem hesitar, querendo que tudo aquilo explodisse, Luca puxou a alavanca, mas para a sua decepção (e curiosidade), nada explodiu. A máquina começou a

trabalhar. Túlio ficou impressionado consigo mesmo, pois era uma raridade que alguma invenção sua não explodisse, agora só precisava ver se, realmente, funcionava.

— Aparentemente funciona. Então, Luca, para onde você gostaria de ir?

— Ir? Você não disse que era uma máquina de ilusões? Como assim? Ela leva a gente para algum lugar?

— Bom, ela é uma máquina de ilusões, então ela pode criar qualquer coisa, em qualquer momento da história. Qual será o primeiro lugar para onde vamos então?

— Eu sempre quis ver os aliens que construíram as pirâmides do Egito, dá para a gente ir até lá?

— Claro, só preciso ajustar as coordenadas e colocar a data certa... e... tá tudo pronto. Vamos? – disse Túlio entrando na máquina que por dentro parecia um cubículo, Luca entrou com ele.

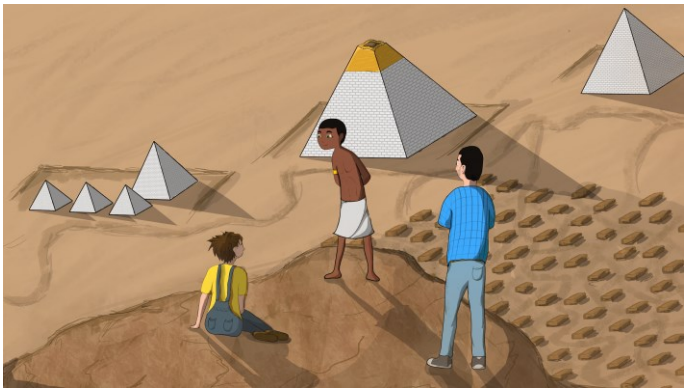
— Aperte esse botão, Luca.

Ouvindo isso, Luca apertou, ainda querendo que algo explodisse, mas o que aconteceu foi algo totalmente inesperado. O cubículo em que ele estava começou a ficar todo branco como se fosse um vazio, e esse vazio sumiu assim como chegou, sendo substituído por pequenos grãos de areia que estavam voando por aí, até dominarem todo o chão, se tornando um deserto. Mesmo vendo aquilo, Luca não estava acreditando em seus olhos. Estava no Egito. Mas não em qualquer lugar do Egito. Estava em meio à construção de uma das pirâmides, que no futuro seria a maior e mais famosa delas, a de Quéops. Vendo tudo

isso, Luca se desequilibrou e caiu na areia. Um estranho foi ajudá-lo a se levantar dizendo:

— Oi Luca, o que está achando de tudo isso?

— Quem é você? Como você sabe meu nome? Onde estou? O que está acontecendo aqui?



— Calma, calma! Sou o Hemiunu, arquiteto da então conhecida Grande Pirâmide de Gizé. E como eu sei quem é você? Ora, isso tudo não passa de uma ilusão; então ainda estamos na garagem do seu tio, dentro da máquina de ilusões. Tudo é uma cópia do Egito Antigo e sou só um ser holográfico, por isso sou quase onisciente. Conseguiu entender tudo?

— Acho que consegui, mas o que é aquilo? – disse Luca apontando para algo que estava em construção.

— Aquilo é a pirâmide de Quéops em construção. Quer ver o que fizemos até agora?

— Eu quero! – disse o tio Túlio. Por um momento, Luca tinha esquecido que ele também estava ali. – Tenho, também, algumas perguntas. Onde estão os alienígenas que muitos falam que ajudaram na construção das pirâmides?

— Felizmente, ou infelizmente, dependendo do seu ponto de vista, não houve nenhum alienígena que ajudou a construir as pirâmides. Construímos tudo com força braçal terráquea e um pouco de ajuda da física e da matemática.

— Matemática? – indagou Luca – Como a matemática pode ter ajudado vocês a construírem algo assim, se não existia nem calculadora?

— O que adianta ter uma calculadora e não saber usá-la? Temos tudo o que precisamos fazendo simples contas. Quer ver como fazemos? Siga-me!

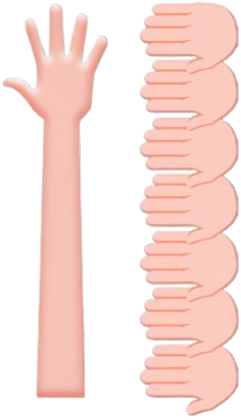
Luca e Túlio seguiram Hemiunu, que os levou até a construção. Chegando lá eles viram diversas pessoas trabalhando, medindo pedras, levantando-as, usando coisas que, ao mesmo tempo em que parecem ser tão complexas, eram muito simples, como roldanas e polias. Foram até um lugar onde havia uma bancada

bem arcaica. Luca concluiu que era uma mesa. Quando chegaram lá, Hemiunu disse:

— Antes de fazer qualquer construção, devemos primeiramente planejar como ela será, e como vamos construí-la. Planejei essa pirâmide para ter 280 cúbitos de altura, e uma base quadrada com cada lado medindo 440 cúbitos.

— O que é esse cúbito? – perguntou Luca.

— Cúbito é a nossa unidade de medida, ela é equivalente à ponta do cotovelo até o dedo médio do nosso faraó. Mede, aproximadamente, 53 centímetros em medidas mais atuais. Também há uma outra relação:



1 cúbito é igual a 7 mãos. E é somente disso que precisamos saber para conseguir achar, de uma maneira fácil, a inclinação em todos os pontos das faces, afinal, queremos uma pirâmide com faces planas e não curvadas.

"Sabemos qual é a altura e a base da pirâmide, então podemos calcular o seu *seqt*, que é um número que

obtemos quando dividimos o percurso horizontal pela sua elevação. Desse modo calculamos o *seqt*, que vai servir para conferir a inclinação de cada face da pirâmide, garantindo que ela não fique curvada.

"Vamos então calcular o seqt dessa pirâmide: sabemos que ela vai ter 280 cúbitos de altura, e a base é de 440 cúbitos, porém devemos usar só metade dessa base, pois o "pico" da pirâmide vai estar no meio da base. Estão conseguindo compreender tudo?

— Estou sim, – disse Luca, e Túlio concordou com a cabeça – então é só dividir 220 por 280? Isso dá 0,7857...., acabei de fazer essa conta pelo celular, no que isso ajuda?

— Calma jovem, devemos saber o que estamos fazendo, quando você disse o "0,7857…", significa que a cada cúbito que subimos na vertical, devemos andar 0,7857... cúbitos de horizontal. Isso é bem trabalhoso, mas caso esse resultado facilite suas contas, pode usá-lo à vontade. Como não facilita as minhas, vou mudar só uma coisinha está bem?

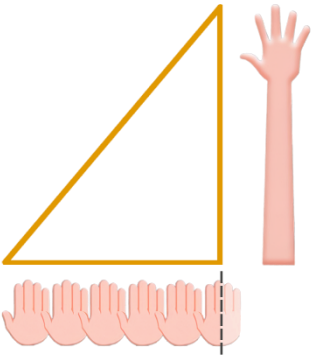
— Está sim, pode continuar

— Primeiro vamos transformar a base de 220 cúbitos para mãos, desse modo conseguimos saber

quantas mãos devemos andar horizontalmente para cada cúbito de altura, o que é mais fácil de trabalhar. Então, para isso devemos multiplicar por a base por 7, transformando cúbitos em mãos, que resulta em...

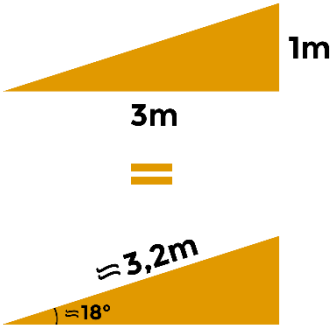
— 1540, Hemiunu.

— Certo, 1540. Agora dividimos por 280, que dá 5,5, mas o que isso significa? Você lembra que para fazer essa conta dividimos o percurso horizontal em mãos pela elevação em cúbitos, ou seja, a cada 5,5 mãos de comprimento horizontal, devemos subir 1 cúbito de altura. Em cada face da pirâmide, se seguirmos essa proporção, vamos garantir o que queremos: que a pirâmide não fique torta, e nem que um lado fique maior que o outro, este desenho mostra como é.



— E onde mais vai usar isso? Somente para construir pirâmides?

— Usando esses valores específicos, possivelmente sim, porém essas ideias servem até atualmente! Um



exemplo disso é a construção de rampas, é mais simples alguém imaginar uma rampa com 3m de comprimento e 1m de altura, do que uma rampa com o comprimento total de aproximadamente 3,2m e um ângulo de, aproximadamente, 18°. Então as ideias de quatro milênios atrás ainda são bem empregadas atualmente, não acha?

— Sim, concordo! Mas por que não aprendi isso na escola?

— Bem, na verdade aprendeu. O que a gente fez, basicamente, foi encontrar a cotangente do ângulo de inclinação, mas na escola dificilmente aplicamos isso a uma situação real. Sempre usamos isso só para "passar na prova" e depois esquecemos que isso pode ser útil.

— Então quer dizer que toda aquela baboseira de trigonometria que meu professor de matemática vive me enchendo para aprender serve para algo de verdade? Onde mais isso é usado?

— Essa matemática "chata" que você aprende tem muita história e justificativa. Ela serve para muita coisa. Sugiro que você dê uma passadinha nos babilônios na Mesopotâmia. Eles se interessavam muito pelo ramo da astronomia, da passagem do tempo e sobre o universo. Para fazer as contas necessárias, eles tinham noções de trigonometria. Creio que você vai gostar muito deles. Bom, agora tenho que ir. Tchau!

Depois dessa despedida meio repentina, Luca viu diante dos seus olhos toda a areia começar a voar e dançar na sua frente. E lá estava ele de volta à oficina do seu tio, junto dele.

— Tio, precisamos ir à Mesopotâmia agora! Quero saber muito mais sobre isso! – Disse Luca suplicando.

— Que tal a gente visitá-los amanhã? Você tem um trabalho para entregar amanhã, não é? E, se não me engano, é relacionada às formas geométricas, certo? Por que não usa o que aprendeu agora para fazê-la?

— Está bem, vou fazer meu trabalho. Amanhã, depois da escola, volto aqui para a gente ver mais do passado, combinado?

— Combinado – Túlio concordou.

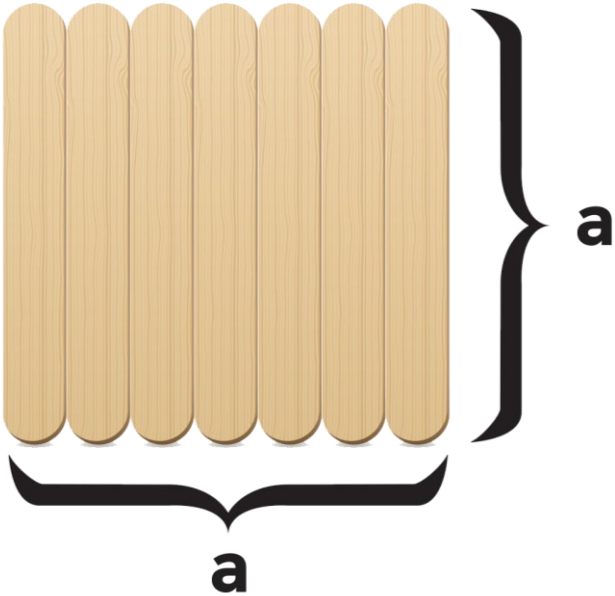
Depois disso Luca voltou para a sua casa, entrou no seu quarto e foi fazer sua tarefa de matemática, que era necessário criar um sólido geométrico, e após sua viagem ao Egito, decidiu criar uma pirâmide.

Atividade 1

Com a decisão do Luca de criar uma pirâmide, ele primeiramente pensou em como faria isso. Decidiu, então, utilizar palitos de sorvete para isso. Pesquisou na internet qual o formato de uma pirâmide. Obviamente ele sabe como uma pirâmide é, mas pesquisou para saber se existe algo especial que a pirâmide tem que ter. Ele descobriu que existem dois tipos de pirâmide: a pirâmide reta, na qual a projeção do vértice da pirâmide (o "pico" da pirâmide) coincide com o ponto que está equidistante – mesma distância – dos vértices da base, e a pirâmide oblíqua, que são todas as que não são retas. Luca então criou uma pirâmide reta com a base quadrada. Crie uma também.

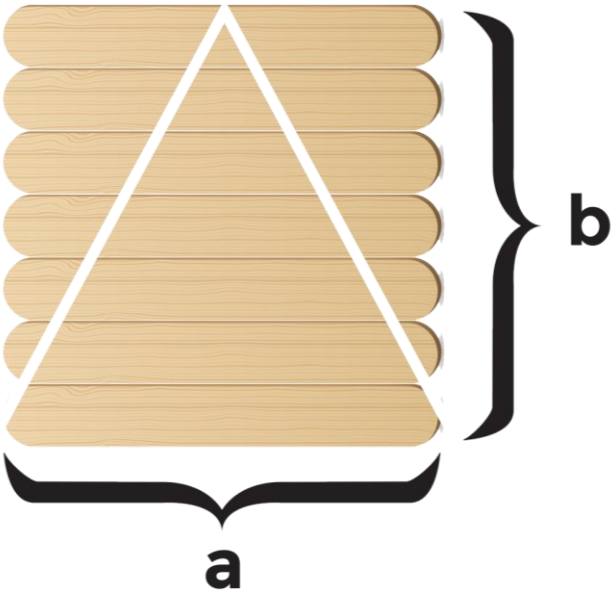
Para isso, é necessário ter palitos de sorvete, cola branca ou cola quente, uma tesoura ou estilete, e régua e caneta (ou lápis) para marcar nos palitos onde deve ser cortado.

Primeiro crie a base, ela é um quadrado, ou seja, todo os lados são iguais, Luca criou algo semelhante a essa imagem:



O número de palitos usados depende do comprimento dos palitos. A figura formada deve ser quadrada, isto é, a altura e o comprimento da figura devem ser iguais. Na figura eles têm medida **a.**

Após isso, ele criou as quatro faces laterais, fazendo algo semelhante a base, mas agora, cortou os palitos formando quatro triângulos, como nessa outra imagem, para facilitar o corte, ele colou as faces laterais em uma folha, e cortou formando triângulos. As medidas aqui são **a** (para a base do triângulo) e **b** (para a altura do triângulo).



Após ter feito as 4 faces laterais, as colou junto à base, formando sua pirâmide. Após terminar o seu trabalho, ele começou a pensar em algumas questões. Crie a sua própria pirâmide e depois volte para ver os questionamentos do Luca.

1- Qual o tamanho do comprimento do lado da base da sua pirâmide?
2- Qual a altura da pirâmide? (dica do autor: O teorema de Pitágoras é algo para considerar)

3- Como você fez para medir a altura da pirâmide, é possível medir diretamente com uma régua?
4- Qual o seqt de sua pirâmide?
5- Como medir a altura de uma pirâmide do Egito? Usando uma régua ou trena seria inviável?

II. Amigo metalizado

No outro dia, Luca acordou e como de costume, se preparou para ir até a escola, levando orgulhosamente sua pirâmide de palitos que fizera no dia anterior. Tirou a nota máxima por seu trabalho, então quando saiu da escola, foi direto para a casa de seu tio, para contar para ele.

— Tio, cheguei da escola. Tirei 10 na minha tarefa! – disse Luca vestido com seu uniforme, e com uma pirâmide em suas mãos.

— Uau, parabéns, Luca! – exclamou Túlio. – Agora vai almoçar e trocar de roupa. Estou fazendo alguns pequenos ajustes na máquina. Quando voltar aqui, pode

visitar a Mesopotâmia, se ainda quiser. Tenho muito trabalho para fazer, então não vou hoje.

— Eu quero! Já volto – falou Luca enquanto corria para a sua casa.

Voltando de sua casa após almoçar e se trocar, perguntou:

— Quais são as mudanças que você fez, tio?

— Percebi que dependendo do lugar para onde iremos, talvez não tenhamos um guia, então criei um! O Marvim, que significa "Máquina altamente recheada de veículos informativos mundiais"!

— Você não é muito criativo com nome, não é mesmo tio?

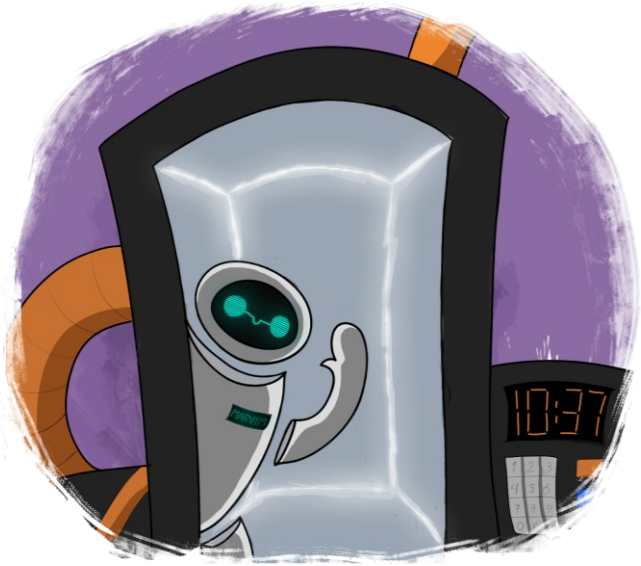
— Qual é, dá uma chance pro seu tio, achou Marvim um nome ruim?

— Na verdade achei muito bom, mas então, quando posso ir pra Mesopotâmia?

— Assim que você apertar esse botão.

Ouvindo isso, Luca olhou para seu tio, e apertou o grande botão vermelho em sua frente com toda a sua força. Luzes se acenderam, e a porta abriu. A máquina estava ligada. E então ele entrou.

Dentro dela surgiu um robô que assustou Luca.



— Calma! – exclamou o robô. – Sou o Marvim, aquele que seu tio acabou de falar, vou ajustar os dados para a sua viagem, e serei seu guia. Alguma pergunta?

— Até o momento não, mas quero ter muitas! – disse Luca ansioso. – Vamos para a Mesopotâmia? Hemiunu disse que vou gostar de lá.

— Já entendi, assim que você autorizar, vamos para lá.

— Pode ir!

Como um passe de mágica, a cabine em que eles estavam começou a mudar. De repente tudo se transformou, casas começaram a surgir, e a lua apareceu

no céu. Era noite e dessa vez Luca não caiu assustado com as mudanças. Sabia que agora estavam na Mesopotâmia, então correu para ver o lugar. Estava em um salão, com algumas pessoas discutindo enquanto observavam as estrelas, com algumas coisas que não ficaram nítidas na simulação, e estavam escrevendo em tabuletas feitas de algo semelhante ao barro. Luca perguntou a Marvim:

— O que é aquilo que eles estão segurando? E o que estão anotando?

—O que estão segurando? Então, os mesopotâmios tinham um grande interesse na astronomia, como você soube pelo Hemiunu, porém, não há registros dos instrumentos que usavam para observar o céu. Eles estão escrevendo em tabletes de argila marcando a relação entre as medidas dos lados de triângulos. Eles tinham uma noção sobre a proporção entre os lados de triângulos semelhantes, apesar de isso ser mais usado na Grécia, muitos anos mais tarde. Mas se quiser um tablete, pegue um!

Após a fala de Marvim, começou a se materializar na frente de Luca um tablete semelhante aos que os mesopotâmios estavam utilizando.

— Mas o que isso aqui faz exatamente?

— Eles anotam diversos grupos de medidas e esse, em sua mão em específico, é chamado de Tablete Plimpton 322, e possui mais de 3500 anos!

— Então isso que está nas minhas mãos é de antes de 1000 a.C.? Como isso funciona?

— Nele, segundo alguns historiadores, está escrito alguns termos que se assemelham às medidas dos lados de triângulos retângulos. Por isso alguns historiadores acreditam que os mesopotâmios tinham uma noção do que se chamou no futuro de Teorema de Pitágoras. Já outros historiadores acreditam que esse tablete expressa noções de trigonometria na base sexagesimal.

— Mas como isso os ajuda?

— Eles possuíam um grande interesse pela astronomia e pelo avanço da agricultura. Você já deve ter ouvido dizer que alguma fruta só nasce em uma estação. Mas como saber qual a estação em que estamos? Eles tinham a mesma dúvida e perceberam que, periodicamente, o céu noturno apresentava a mesma configuração de estrelas. Isso ocorre de doze em doze meses, ou seja, se tirarmos uma foto do céu hoje, daqui um ano ele estará igual. Isso acontece

diariamente: o céu de hoje está com a mesma configuração que estava há exatamente um ano atrás, e estará igual daqui a um ano.

— Então quer dizer que se eu observar as estrelas hoje, e daqui a um ano, elas estarão no mesmo lugar?

— Elas estarão na mesma posição. Talvez daqui a alguns milhões de anos, não, porém isso não importa no momento. O zodíaco foi criado pelo fato de as estrelas estarem sempre na mesma posição, pois em todo ano as constelações aparecem no céu como estavam no ano anterior. Mas agora surge uma dúvida: como saber qual é a constelação?

— Eles anotavam as estrelas nisso? – disse Luca apontando para o tablete.

— Possivelmente sim, mas infelizmente não tenho nenhum registro no meu banco de dados que comprove isso. Alguns estudos mostram que eles tinham grande aptidão com o calendário. Desse modo, só analisando o céu noturno, conseguiam saber em qual estação estavam, e qual seria a próxima. Com isso eles conseguiam se planejar para o futuro.

— Entendi, então eles estudavam trigonometria somente para a agricultura?

— Não. Ainda não podemos chamar o que os mesopotâmios faziam de trigonometria: eles eram muito práticos com as coisas, faziam as contas que eram necessárias. É muito difícil saber sobre a história da trigonometria antiga, pois não há nenhum registro sobre como faziam as contas. Temos que criar algumas hipóteses sobre o conhecimento que tinham. Por isso não pude renderizar os instrumentos de observação astronômica que eles usavam, pelo fato de não termos esses dados. O que sabemos é que o interesse deles pela astronomia, para estabelecer um calendário, era tanto para saber a época de plantio, quanto por questões religiosas. E para conseguir fazer as contas usavam o que no futuro seria chamado de trigonometria como ferramenta.

— Então não sabemos o que eles faziam por não termos registros – disse Luca decepcionado – mas você me disse que essa placa está escrita em linguagem *sexa* alguma coisa, como sabe isso?

— Sexagesimal. Sabemos disso por conta das traduções dos tabletes: não há registro sobre a trigonometria, especificamente, mas em algumas temos

registros matemáticos, de modo geral. Um deles é que eles usavam a base sexagesimal.

— Mas como eles usam a base sexagesimal? Parece ser muito complicado, como isso ajuda?

— Da mesma forma que eu, sendo um robô, tenho muito mais facilidade em utilizar a base binária, que é a base 2, por ser uma máquina e só reconhecer dois estados para algo: ligado ou desligado. A base sexagesimal é a base 60. Para eles, que já sabiam usá-la facilmente, a base 60 não era difícil. Para você, por ser algo novo, parece ser muito complicado, apesar de não ser, olha só que eu vou te mostrar!

"Primeiramente, quando a gente quer escrever um número na base decimal, por exemplo, 123, podemos escrever como 100+20+3, ou seja: $1\times100 + 2\times10 + 3\times1$, que é mesma coisa que: $1\times10^2 + 2\times10^1 + 3\times10^0$.

"Por usarmos a base 10, escrevemos agrupamentos de potências de 10. Os mesopotâmicos usavam o sistema sexagesimal, então vão aparecer potências de 60, e da mesma forma que separamos em unidades, dezenas, centenas, que são agrupamentos de 10, eles também separavam agrupamentos de 60.

"Por exemplo, usando notação sexagesimal, o número (7:19:3) na base 60 significa: $7\times60^2 + 19\times60^1 + 3\times60^0$, e fazendo essa conta chegamos em 26343 na base 10."

— Mas por que usavam essa base? Contar de 10 em 10 não é mais fácil?

— Também não existe um motivo certo para isso. Alguns acreditam que é pelo fato de 60 ter muitos divisores, diferente do 10, que só tem quatro divisores (o 1, 2, 5 e o próprio 10). O 60 possui 12 divisores (o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60), o que simplifica algumas divisões entre dois números.

— A medida de ângulos tem relação com isso? Pelo fato de 360º ser 60º×6?

— É bem provável que sim, mas isso se estabelece com os gregos, que lidavam com os ângulos usando a base sexagesimal, dividindo o círculo em 360 partes iguais. Os mesopotâmios não tinham interesse em ângulos, tinham um interesse direto nas medidas de lados dos triângulos, como esse tablete que está em suas mãos mostra. Nele não há registro algum de ângulo, só dos lados de triângulos retângulos.

— O que mais eles fizeram? Você disse que eles fizeram o calendário, eles também criaram o relógio?

— Eles tinham grande interesse no calendário e no passar do tempo. Talvez seja esse o motivo de 1 hora tem 60 minutos, por fazerem cálculos de tempo na base sexagesimal. Mas não há registro de terem criado um relógio. Há registros antigos dos egípcios já usavam o relógio de sol, porém é bem provável que os mesopotâmios tenham aprimorado. Com o passar dos anos, observaram que em certas estações, como no verão, os dias são mais longos que as noites, então seria necessário registrar isso no relógio, de alguma forma. A solução que encontraram foi usar uma barra curvada, diferente da barra mais reta dos egípcios. Você não deve ter entendido isso, então vou explicar de uma forma mais simples.

"Se pegar uma vareta e fincar no chão, você pode perceber que no nascer do dia, a sombra dela estará grande e ficará cada vez menor. Ao meio-dia haverá a menor sombra, pelo fato de o Sol estar bem acima da vareta. Ao entardecer, a sombra volta a crescer, ficando cada vez maior. Se você observar a sombra da vareta no outro dia, ela seguirá o mesmo caminho. Então, se fizer

alguma marcação indicando onde a sombra estava às 2h da tarde de um dia, no outro dia, às 2h da tarde, a sombra estará, praticamente, no mesmo lugar"

— Então, aqueles relógios de Sol que aparentam ser mega complicados podem ser reduzidos a uma vareta no chão?

— Isso mesmo! Mas tem um detalhe: devido aos movimentos que a própria Terra faz em torno do sol, a marcação da sombra de um dia para outro estará deslocada um pouquinho para o lado. De um dia para o outro essa diferença é mínima, mas acumulativa, e em 6 meses já será algo notável. São esses pequenos erros que possivelmente os mesopotâmios notaram, por isso curvaram um pouco essa vareta.

— Me ensina a fazer um relógio de sol, Marvim?

— Claro, uma forma simples de fazê-lo é semelhante a vareta no chão, mas podemos usar um palito de churrasco e um pedaço de papelão, junto de um arame ou qualquer outra coisa que ajude manter esse papelão inclinado e em pé.

Dizendo isso a simulação começou a mudar. Da Mesopotâmia, Luca foi levado a um lugar que Marvim chamou de oficina criativa, com desenhos nas paredes

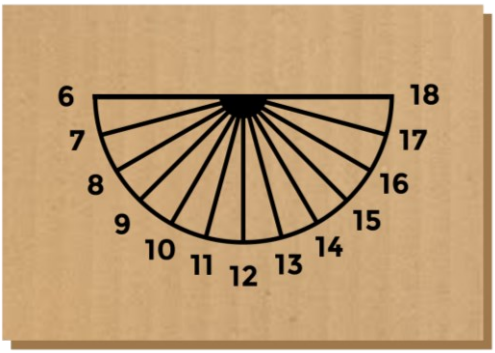
que se assemelhavam a borrões de tinta, com mesas que tinham a forma de um apontador gigante, e de uma mega borracha; a porta dessa sala era feita de lápis de cor. De frente para uma mesa toda colorida em roxo e verde, Marvim pegou um pedaço de papelão e um palito de churrasco e explicou para Luca como fazer um relógio de sol.

Luca ficou feliz com seu relógio de sol. Depois de algum tempo despediu-se de Marvim e retornou à oficina de seu tio, para contar a Túlio sobre sua viagem e pretendendo testar seu relógio de sol. Após isso voltou para casa, para descansar para o próximo dia.

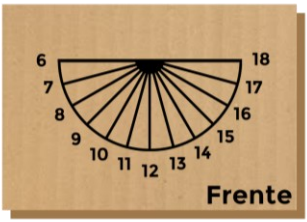
Atividade 2

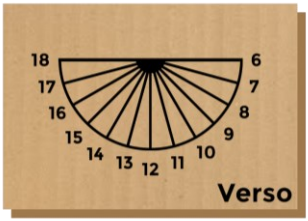
Dentro da oficina criativa, Marvim contou ao Luca que existem diversos modelos de relógio de sol, alguns bem simples e outros mais complexos, feitos com impressão 3D, que marcam até mesmo os minutos. Porém como isso não é algo de fácil acesso, Marvim decidiu ensinar a Luca como construir um que é, literalmente, um pedaço de papelão espetado com palito de churrasco.

Para isso, basta pegar um pedaço de papelão quadrado e, com a ajuda de um transferidor, desenhar um meio círculo, dividindo-o de 15° em 15° e marcando os números de 6 a 18, conforme a figura. Essa marcação servirá para indicar as horas. O palito que iremos colocar daqui a pouco, será espetado no centro do meio círculo e fará uma sombra sobre esse desenho.

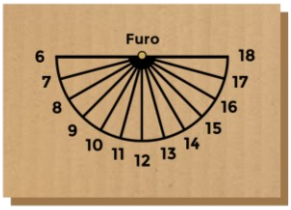


Após isso, é preciso criar o mesmo desenho do outro lado do papelão, com as marcações de horas seguindo o que está na frente, ou seja, se na frente escreveu 6h até 18h, aumentando 1 hora por traço, agora deve fazer o contrário, começando em 18h e indo até as 6h, diminuindo 1 hora por traço

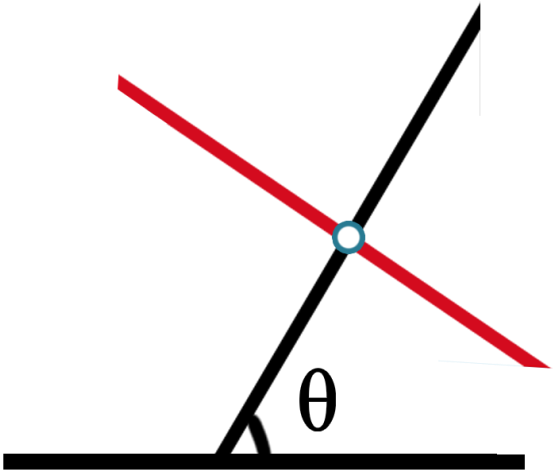




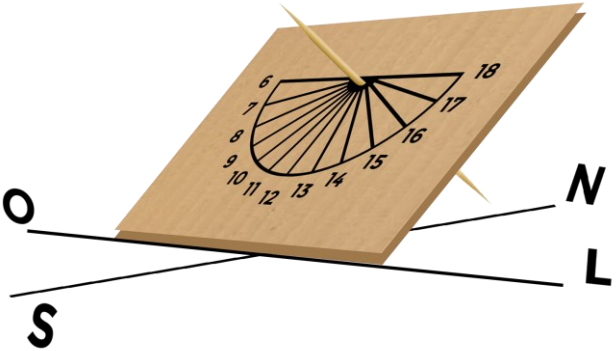
Feitas as marcações, é preciso colocar o palito de churrasco atravessando o papelão, passando onde as linhas se cruzam no desenho. Ele deve ficar perpendicular ao papelão, ou seja, deve ficar "retinho", e não inclinado, como na figura a seguir.



Agora é preciso fazer algo para deixar o papelão com o palito em pé, para isso, vamos construir um suporte com um pedaço de arame. O arame deve ser inclinado conforme a figura abaixo e preso no papelão. A inclinação do arame depende da latitude de sua localização geográfica. Assim, é necessário saber qual a sua latitude e, então, achar o ângulo complementar a ela, ou seja, a diferença para 90°. Em São Paulo, por exemplo, a latitude é de -23° Norte. Pesquisando na internet achamos esse valor. Desconsideramos o sinal negativo e a indicação de direção, pois fizemos o desenho dos dois lados do papelão. Tomamos o número em si, nesse caso 23°, e calculamos 90° - 23°, que resulta em 67°. Então, no caso de o relógio localizar-se em São Paulo, o ângulo θ (inclinação do papelão com a horizontal) deve ser de 67°



Feito isso, precisamos ajustar onde o relógio vai ficar: ele deve ficar em uma superfície plana, alinhado na direção leste-oeste, com a parte da frente virada para o sul, como mostra nesse desenho, para descobrir onde fica os pontos cardeais (norte, sul, leste, oeste), pode-se utilizar uma bússola, ou um celular com essa função



Feito isso, seu relógio de sol estará pronto!

Algumas dúvidas que podem surgir:

1) Qual seria o motivo para a marcação de divisões de 15°? Simples, o dia possui 24h, ou seja, a cada 24h, o planeta dá uma volta completa, que equivale a 360°, então em uma hora, o planeta completa 15° dessa volta (360° / 24).
2) Por que só precisamos de meio círculo? Porque metade do dia tem Sol, a outra metade já é noite, o Sol já se pôs.

Agora com o relógio feito, teste ele, veja se com o passar dos dias, o horário dele será o mesmo do seu celular.

III. O teorema foi roubado?

No dia seguinte Luca retornou a casa de seu tio e observou seu relógio de sol, que marcava 14h, mesmo horário de seu celular. Ficou orgulhoso com o resultado e mostrou a seu tio, que o elogiou e disse que, caso ele quisesse, poderia fazer mais viagens. Imediatamente Luca concordou e foi para mais uma viagem. Entrando na máquina, procurou por Marvim, que disse:

— Oi Luca, sabia que voltaria! Pulando as formalidades, quer conhecer os gregos hoje?

— Oi Marvim, o que eles têm de interessante?

— Vamos lá descobrir!

E como de costume, tudo à sua volta começou a mudar. Porém, a visão do lugar era diferente do que esperava, ele se encontrava no Egito, e não na Grécia.

— Marvim, acho que a máquina está errada, estamos no Egito, não na Grécia. Aquela é a pirâmide de Quéops, já estive aqui!

— Sim, eu sei, mas dessa vez vamos ver o trabalho de um grego, Tales de Mileto.

— Esse é o mesmo do Teorema de Tales, que aprendi na escola?

— Sim, e ele veio para o Egito para fazer um trabalho especial no qual, supostamente, aplicou o teorema das retas paralelas para realizá-lo, daí o nome "Teorema de Tales". Vamos lá conversar com ele para saber mais.

E foram andando em direção a Tales. Chegando lá, Marvim disse:

— Olá Tales! Esse é o Luca, ele está interessado em saber mais sobre o seu trabalho!

— Oi Luca, tudo bem?

— Oi Tales, tudo bem sim. Meu professor de matemática fala sobre seu teorema, mas o que ele tem a ver com o Egito?

— Primeiro, eu não faço ideia de que teorema é esse. O chamado "Teorema de Tales" que você aprendeu, foi uma homenagem que os matemáticos mais modernos fizeram a mim, pelo trabalho que estou fazendo agora.

— E o que você está fazendo?

— O faraó do Egito me pediu para medir a altura da Pirâmide. A base foi fácil, só estiquei uma corda para isso. Como eu sei o comprimento da corda, só precisei saber quantas vezes era preciso esticá-la. Mas a altura da pirâmide é algo mais complicado.

— Mas como essa estaca vai te ajudar? – Disse Luca apontando para uma vara nas mãos de Tales.

— Quando eu finco essa estaca no chão, ela cria uma sombra que posso usar para calcular a altura da pirâmide. Vamos até a sombra da ponta da pirâmide, e lá iremos fincar essa estaca no chão.

Dizendo isso eles foram. A pirâmide é, realmente, grande e por estar ainda bem cedo, ela fazia uma imensa sombra.

— Agora que finquei à estaca no chão, temos dois triângulos semelhantes. Assim, temos uma proporção entre os lados dos triângulos.

— Quais triângulos? Não estou os vendo.

— Vou desenhar para você, olhe.

E começou a rabiscar no chão de areia dois triângulos retângulos, um que representava a pirâmide com sua sombra e outro que representava a estaca e a sombra dela.

— Sabemos que esses triângulos são semelhantes pelo fato de as alturas serem paralelas, e os raios de Sol que formam as sombras também podem ser considerados paralelos. Então podemos escrever a proporção: a razão entre a altura da estaca com sua sombra é igual à razão entre a altura da pirâmide com a sombra dela. Não podemos esquecer que metade da base da pirâmide conta nisso também.

— Então só realizando essa proporção, é possível saber o tamanho de qualquer coisa?

— Sim! Isso ocorre pelo fato que os raios de Sol chegam, praticamente, paralelos à Terra, então usamos a ideia de paralelismo para medir.

— Que demais! Quando chegar em casa vou medir a altura da torre Eiffel, só vou precisar saber a sombra dela...

— Isso não vai dar certo, Luca, mesmo que você, da sua casa, consiga pedir para alguém em Paris medir a sombra da Torre Eiffel. A curvatura da Terra vai atrapalhar nisso, pois a França está muito longe do Brasil.

— Mas eu não posso medir o quanto a curvatura da Terra atrapalha, e assim ajustar minhas contas para medir a altura da Torre Eiffel?

— Bom, hoje existem jeitos mais fáceis de medir o que você quer. É possível calcular do modo que você quer, mas seria muito trabalhoso, impraticável.

— Como eu sou só uma ilusão na sua frente, tenho acesso a um banco de dados e sei que uma pessoa daqui a uns 400 anos, mediu a circunferência da Terra inteira usando o mesmo princípio que você pensou.

— Espera, um sujeito que há 2000 anos mediu a circunferência da Terra inteira? Quem foi ele?

— Sim, mediu! Chamava-se Eratóstenes. Depois dê uma passadinha lá e veja como ele fez.

— Vou sim! Resumindo, o que você fez foi apenas aplicar semelhança de triângulos. Por que você foi homenageado por conta disso?

— O que eu fiz é puramente semelhança de triângulos, mas revolucionou a matemática pela forma como nós, gregos, pensávamos. No caso, nem fui eu mesmo quem demonstrou o chamado Teorema de Tales. Mas esse teorema é atribuído a mim pelo fato de eu ter sido, possivelmente, o primeiro a aplicar essas ideias na solução de um problema, no caso, medir a altura da pirâmide.

"Você deve ter reparado que tanto os egípcios, como os mesopotâmios, tinham uma visão prática da matemática, faziam os cálculos necessários para resolver um problema prático. Isso não significa que a matemática deles era ruim, pelo contrário. Porém, por não anotarem como faziam, de fato, as contas, não há registros sobre o porquê as faziam, só há registro dos resultados finais. Eles tinham uma matemática bem sofisticada, lembra do tablete que você mesmo viu? Nele havia o que, no futuro, seria chamado de triplas pitagóricas. Esse resultado nos interessou,

principalmente aos chamados pitagóricos, que são os seguidores de Pitágoras.

"Nós tínhamos uma visão mais conceitual da matemática, buscando a essência dela, o real motivo daquilo, por acreditarmos que tudo está organizado segundo os números e as formas matemáticas, como Pitágoras dizia, mesmo eu não o conhecendo por ele ter vindo depois de mim. Lembre-se que sou só uma simulação."

— E como isso ajudou vocês?

— Primeiro, como temos uma visão conceitual, não nos limitamos a casos específicos. Por isso, hoje existem fórmulas gerais e abstratas: você tem um problema específico no qual pode aplicar uma fórmula e pronto! Resolvido! Tínhamos interesse em como resolver um problema matemático no caso geral. Não importava se os valores numéricos seriam um, dez, cem, um bilhão. Importava saber como resolver o caso geral e o que aquilo realmente significava. Assim conseguimos descrever propriedades gerais e abstratas.

"Semelhança de triângulos é algo que, olhando, aparenta ser só um problema de geometria como "calcular as medidas dos lados de um triângulo,

sabendo as medidas do outro". Porém, esse princípio pode ter diversas aplicações, não só na geometria, como também na Álgebra, no Cálculo, e em outras teorias ainda desconhecidas para nós, que surgirão daqui a muitos anos. Algo mais simples como, por exemplo, o teorema de Pitágoras, pode ser demonstrado usando-se a semelhança de triângulos."

— Como? O teorema de Pitágoras não foi criado para descobrir os lados dos triângulos retângulos?

— Depois você pode perguntar para o próprio Pitágoras, se quiser. Ele também era grego.

— Marvim, depois vamos falar com ele!

— Tudo bem – assentiu o robô.

— Continuando – disse Tales – nas suas viagens te falaram sobre a trigonometria, certo? Mas onde o que estou falando se encaixa na trigonometria? Bem, a trigonometria nada mais é que uma aplicação especial de semelhança entre triângulos.

"Quando dizemos que, num triângulo retângulo, o seno de um ângulo é o cateto oposto a esse ângulo dividido pela hipotenusa, estamos comparando dois triângulos semelhantes: um sendo o seu triângulo e o

outro é um triângulo especial, que possui hipotenusa igual a um.”

— Como assim "que possuiu hipotenusa igual a um"?

— Isso ocorre pela forma na qual a própria trigonometria evoluiu. Quando Marvim te contar sobre o seno você vai entender melhor, mas de qualquer modo, a trigonometria é uma aplicação especial de semelhança de triângulos.

— Você tinha falado que os gregos tinham a visão mais conceitual, não entendi muito bem essa ideia, pode me explicar?

— Claro! Ontem você visitou os mesopotâmios. Reparou que não havia quase nenhuma informação sobre como eles faziam suas contas? Só se sabe que eles conheciam muitos resultados matemáticos, mas não como foram criados. Também percebemos isso, e concluímos que isso era um tremendo erro!

"Assim não se tem uma visão crítica, e sem essa visão, não é possível evoluir na ciência. Como poderíamos transmitir os conteúdos para os outros senão os escrevêssemos para explicá-los aos que queiram aprender? Nós, os gregos, decidimos que tudo

deve ter um porquê, cultivamos essa visão crítica. Desse modo, conseguimos extrair a essência de um raciocínio matemático e aplicá-lo em vários casos. Como acabei de fazer, usei a ideia de triângulos semelhantes para medir a altura da pirâmide."

— Então com semelhança de triângulos, além de descobrir medidas de um triângulo, posso medir a pirâmide, ou provar o teorema de Pitágoras. E toda a trigonometria é baseada nisso?

— Sim! Acho que você pegou a ideia.

— Mas eu não sei como a semelhança de triângulos funciona, como descobrir?

— A explicação é praticamente trivial. Em algum momento da sua vida você já deve ter visto o quadro da Monalisa em livros, revistas, no celular, ou no computador. Esse quadro tem pouco mais de meio metro de altura. Por que você consegue vê-lo inteiro mesmo no seu celular que, comparado ao quadro, é minúsculo?

— Porque a imagem inteira é proporcional ao original, não é isso?

— É exatamente isso! Caso só uma só medida diminuísse, o quadro ficaria distorcido, então é

necessário diminuir todos os lados proporcionalmente. Os triângulos semelhantes também obedecem a essa lei, por isso o nome de semelhança entre triângulos.

— O seu teorema cita retas paralelas e transversais, como meu professor fala. Você está aplicando semelhança entre triângulos, mas no enunciado de seu teorema nem tem triângulos!

— Como eu disse, não fui eu quem criou esse teorema, porém a explicação disso é algo muito mais simples. Basta pegar uma das retas transversais e movê-la para o lado, até cruzar a outra, formando triângulos. Então, aplicando as ideias de semelhança, você visualizará o teorema. Percebeu que não precisamos colocar um número em específico para realizar essas demonstrações? Podemos trabalhar em cima do conceito sem nos importarmos com medidas específicas, pois senão a propriedade matemática serviria apenas para um problema em específico, e não para todas as possibilidades de medida. Queremos entender realmente como funciona.

— Entendi! Então, recapitulando, os egípcios e os mesopotâmios basicamente faziam as suas contas, mas não tinham uma visão conceitual, ou melhor, não a

registraram para as futuras gerações. Isso mudou com os gregos, para quem uma mesma ideia pode ser usada em diversas aplicações. Então devemos buscar a essência daquilo, e não simplesmente o resultado para colocar em uma prova da escola. É isso?

— É exatamente isso. Você já pegou o jeito. Por que não visitar agora mesmo o Pitágoras, que vai te contar mais sobre seu teorema, que, aliás, também não é dele.

— Como assim?

— Pergunte a ele!

— Certo, vamos então Marvim? Obrigado por tudo, Tales.

— Eu que agradeço por você querer aprender tanto assim!

— Vamos então? – e com isso todo o local começou a mudar. Estavam, agora, em uma cidade grega, com diversos pilares à sua volta e, em uma mesa da praça, estava um sujeito barbudo com um turbante na cabeça, olhando diversos números, triângulos, e triângulos feitos com números.

— Aquele é Pitágoras – disse Marvim apontando para o homem.

— E o que ele está fazendo?

— Vamos lá descobrir!

— Olá Pitágoras, sou o Luca, gostaria de aprender mais sobre o que você fez, principalmente sobre o seu teorema, poderia me explicar mais?

— Olá Luca, claro que posso te explicar mais, porém, que teorema é esse? Eu não criei nenhum teorema.

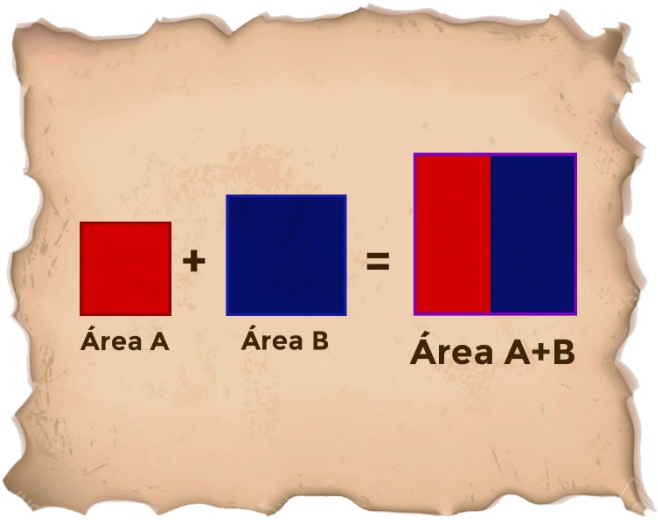
— Mas então, quem criou o "**A** ao quadrado mais **B** ao quadrado é igual a **C** ao quadrado"?

— Ah, agora entendi. Você está falando de "quadrar dois quadrados".

— Não entendi.

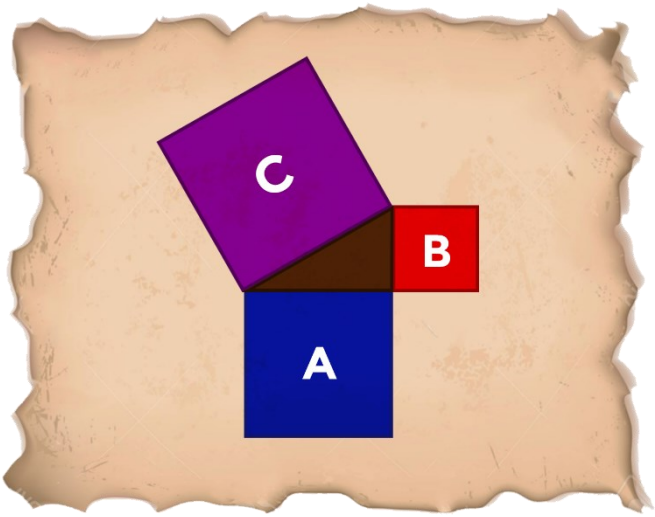
— Ora, você mesmo disse, "**A** ao quadrado mais **B** ao quadrado é igual a **C** ao quadrado" que significa: você tem um quadrado de área **A**, e somando com um quadrado de área **B** para encontrar um grande quadrado de área **C**, dessa forma. – Falando isso, começou a desenhar:

— É exatamente isso que você disse, e é o que fazíamos.



— Mas onde o triângulo retângulo entra nisso? Na minha escola, meu professor sempre usou o teorema de Pitágoras em triângulos retângulos.

— Costumávamos traçar figuras, fazer alguma transformação geométrica nela, criando outra figura com a mesma área. O triângulo retângulo nos auxiliava para somar as áreas de dois quadrados, pois se colocarmos esses quadrados de modo que criassem um triângulo, esse triângulo será retângulo, igual a essa figura – então desenhou e mostrou a Luca:



— Então vocês não se importavam com o triângulo em si, e sim com áreas?

— Isso mesmo!

— Mas como sei que isso funciona?

— Quando queremos saber a área de uma figura geométrica muito complexa, construímos um quadrado equivalente, assim essa figura e esse quadrado terão a mesma área e, ao invés de tentar descobrir a área dessa figura complexa, simplesmente medimos o lado do quadrado, e calculamos sua área. Como ambos possuem a mesma área, o nosso problema ficou mais simples.

— Ouvi dizer que os mesopotâmios tinham triplas pitagóricas, o que é isso?

— Quando pegamos esses dois quadrados menores e somamos suas áreas gerando um quadrado maior, obtemos essas triplas que são, justamente, os lados dos quadrados. Por exemplo, (3 – 4 – 5) é uma tripla pitagórica, que está dizendo que a área de um quadrado de lado 3, somada a área de um quadrado de lado 4, gera a área de um quadrado de lado 5.

— E como descobrir quais são elas?

— Isso já é uma pergunta que não sei responder, por não termos dados suficientes dessa época para essa simulação. Porém, Euclides criou um algoritmo que gera esses números, então, possivelmente, o usávamos para descobrir as triplas pitagóricas.

— Certo, então usavam esse algoritmo de Euclides para descobrir os números. Não é mais fácil desenhar os quadrados e medir o lado deles então?

— Seria mais fácil, porém queríamos trabalhar, principalmente, com números inteiros ou números que podem ser escritos como fração entre inteiros, os chamados números racionais. E nossas réguas eram

imprecisas, logo dava errado simplesmente desenhar e medir o tamanho.

— Então por que não simplesmente usavam a fórmula $a^2 + b^2 = c^2$?

— Primeiro, que não usávamos os símbolos algébricos que existem hoje. Segundo, há o problema de obtermos números irracionais que, na época, nem sabíamos que existiam, imagina então trabalhar com eles!

"Buscávamos soluções inteiras para esse problema, não tínhamos ideia da existência dos números irracionais. Começamos a desconfiar que eles existiam quando procuramos saber qual o lado de um quadrado com área igual a dois".

— Ora, mas é raiz de dois, todo mundo sabe.

— Todo mundo hoje sabe, pois demonstramos isso a dezenas de séculos atrás, foi um pitagórico chamado Hipaso de Metaponto que concluiu sobre a existência de irracionais. Por causa desse desafio descobrimos que a raiz de dois é irracional, o que contrariava nossas ideias sobre números. Então, imaginamos que existem outros números irracionais também. Não tínhamos nem o símbolo de raiz, imagina saber sobre a existência

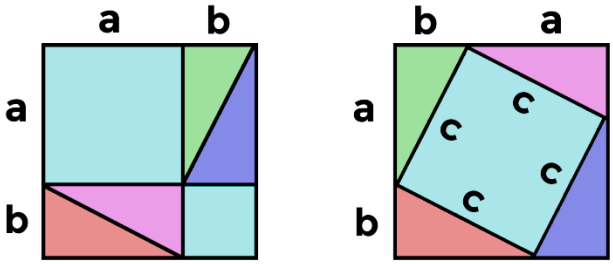
da irracionalidade de raiz quadrada de dois, ou de três. Isso foi um desafio e tanto.

— Agora estou pensando, quando meu professor falou do seu teorema, ele simplesmente passou a fórmula, e eu sei que ela funciona, mas ele não explicou o porquê ela funciona, pode me mostrar? Você disse que estavam juntando quadrados, mas por que isso gera um triângulo retângulo?

— O que você está buscando é a demonstração do teorema, e existem muitas formas de demonstrá-lo, mas a que a escola pitagórica usou, em um primeiro momento, foi essa.

— Escola pitagórica? Não foi você quem o demonstrou?

— Não, do mesmo modo que Tales foi homenageado, eu também fui, mas voltando ao desenho – Pitágoras então pegou uma folha e desenhou isso:



— Essa – continuou Pitágoras – é a demonstração: os dois quadrados maiores têm o mesmo tamanho, possuem lado **a** + **b**, a única diferença é como ele está dividido internamente. O primeiro tem quatro triângulos e dois quadrados menores: o de lado **a**, e o de lado **b**. O segundo também possui os mesmos quatro triângulos, mas só um quadrado, de lado **c**, logo, a soma da área do quadrado de lado **a** com o quadrado de lado **b**, é equivalente a área do quadrado de lado **c**, já que todos os triângulos são iguais, com isso chegamos que **a** ao quadrado mais **b** ao quadrado é igual a **c** ao quadrado.

— Isso é genial! Onde mais esse teorema é usado?

— Como conseguimos juntar dois quadrados em um só, podemos calcular a área deles mais facilmente. Pense que você tem duas casas quadradas, e precisa saber qual a área total das duas. Fazendo isso você

consegue simular uma terceira casa maior, que possui a área igual à soma das duas anteriores. Era, basicamente, o que fazíamos, somávamos áreas, não só de quadrados, mas de retângulos, triângulos, e qualquer outra figura. Sempre queríamos quadrar a figura, transformá-la em um quadrado, usando apenas régua sem marcas de medida e um compasso. Na atualidade, os matemáticos o utilizam principalmente para descobrir lados de triângulos retângulos.

— Por que essa matemática é bem mais legal do que eu aprendo na escola?

— A matemática é algo muito divertido, quando olhamos para ela como uma porta de entrada para conseguir explicar a natureza! Não gostamos de usar mitos e crenças, mesmo acreditando nelas, gostamos de explicar a natureza usando a matemática.

"Um exemplo mais atual: por que as coisas caem? Dizer somente "Pois o Criador quis que fosse assim" fica algo vago, surgindo outras dúvidas como "O que o Criador fez para que as coisas caíssem?" Tornando essa pergunta mais aberta e divertida de ser trabalhada, hoje sabemos que as coisas caem por conta da gravidade que Isaac Newton estudou e, usando a matemática,

conseguiu descrever esse fenômeno, o que deixa a ciência cada vez mais fascinante, não acha?

— Eu acho! – disse Luca – aliás, Tales tinha falado de um sujeito que mediu a circunferência da Terra, Eratóstenes, Como ele fez isso? Pode me explicar?

— Poder eu posso, por ser só uma simulação, mas em vida eu não o conhecia, que tal visitá-lo amanhã? O que acha? Hoje já conversamos muito. Amanhã você pode voltar aqui e descobrir como ele fez isso, mas acho que com o seu conhecimento, você pode deduzir o que ele fez. Tente descobrir isso e amanhã fale com ele. Até lá, acho que seu tio vai gostar que você conte sua viagem para ele.

— Certo, muito obrigado Pitágoras. Outro dia quero voltar e conversar mais com você. Marvim, podemos ir?

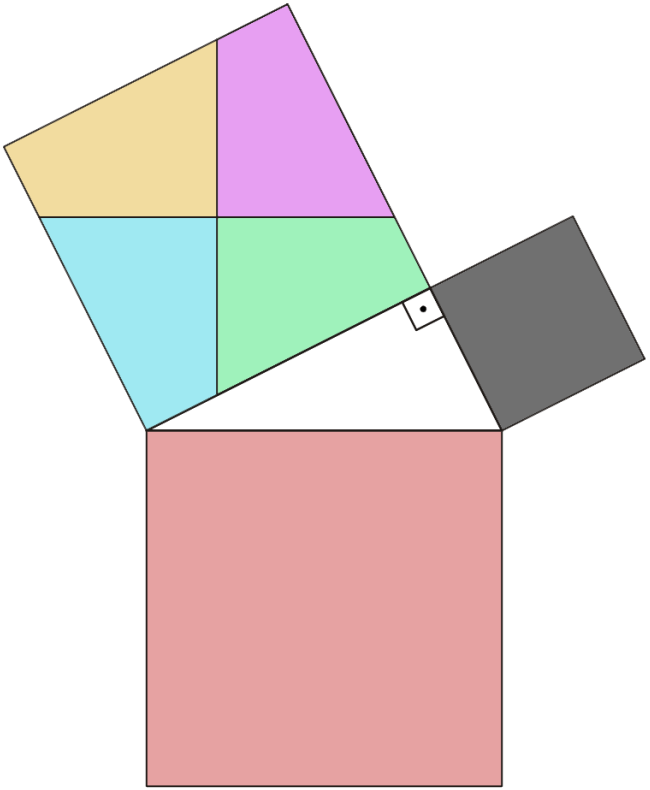
— É pra já! – Com isso Luca estava de volta na oficina do seu tio, o viu sentado em uma cadeira com uma xícara de chá em sua mão. Luca pegou um pouco de chá também e começou a narrar o que aprendeu para o seu tio. Após isso, voltou para sua casa e começou a refletir em como conseguir medir a circunferência do planeta inteiro, depois disso foi dormir.

Atividade 3

Como vimos nesse capítulo, o teorema de Pitágoras era usado para calcular áreas. Porém isso realmente funciona? Para demonstrar esse resultado existem diversos modos, como rigorosas provas matemáticas, mas usaremos aqui explicações mais simples, com figuras recortadas no papel.

Com auxílio de uma impressora, ou de um papel vegetal ou semelhante, copie a figura da próxima página, e a recorte, caso queira, faça isso em um papel mais firme, ou em um EVA.

Com seu quebra cabeça feito, o seu objetivo é utilizar as figuras geométricas que compõe os quadrados dos menores lados do triângulo para recriar um quadrado com a mesma área do quadrado correspondente a hipotenusa.



IV. A verdade sobre a Terra

No outro dia, Luca acordou, comeu um lanche, se arrumou e foi à escola. Chegando dela, correu para a casa de seu tio, determinado a descobrir como mediram o tamanho do planeta.

— Oi Túlio, hoje vou descobrir como medir o planeta Terra inteiro.

— Oi Luca, boa sorte com isso, se precisar eu te empresto minha trena.

— Eu acho que não vou precisar, seria impossível medir o planeta inteiro usando só uma trena, não acha?

— Bom, se descobrir outra forma, me conte.

— Tudo bem! – Disse Luca, já entrando na máquina de ilusões e encontrando Marvim.

— Oi Luca! – disse Marvim – Quer fazer algo específico hoje?

— Oi Marvim, quero medir o planeta, podemos?

— Claro, vamos falar com Eratóstenes, então. Ele trabalhou em diversas áreas da matemática, como teoria dos números. Nasceu em 276 a.C. e com pequenas observações, mediu a circunferência da Terra. Vamos encontrá-lo.

Com isso, a máquina de ilusões começou a se transformar mais uma vez. Apareceu um homem meio calvo com uma grande barba. Ele estava sentado à uma mesa, olhando um pedaço de papel e uma estaca fincada no chão à sua frente.

— Não, isso está errado! – dizia Eratóstenes.

— Olá, o que exatamente está errado? – interveio Luca.

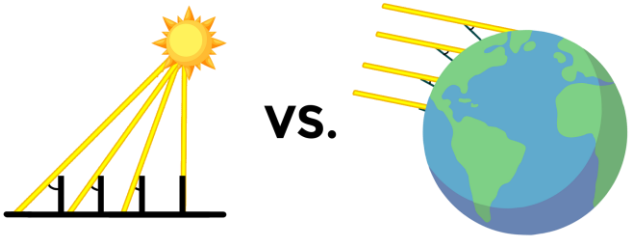
— Oi Luca, estou analisando alguns dados, mas as horas estão, aparentemente, erradas.

— Que dados?

—Viajei a outras cidades, para observar as estrelas em um campo mais aberto, mas as posições delas estão erradas em minhas análises. Como pode?

— O que exatamente está errado? O horário da marcação?

— Aparentemente sim. Era o solstício de verão em uma cidade, quando o Sol está em zênite, isto é, o ponto mais alto. Caso você esteja em um poço profundo, você consegue ver o Sol perfeitamente. Mas em outra cidade, a um pouquinho mais de 5000 estádios de distância, nesse mesmo horário, caso você esteja em um poço, não dá para ver o sol, o que não faz nenhum sentido – disse Eratóstenes, e após uma pequena pausa completou – só existe duas explicações para isso. Primeiro, a Terra é uma esfera e o Sol está muito longe, e então podemos considerar que os raios solares chegam paralelos à Terra. Desse modo, o próprio planeta cria sombras. Ou, uma segunda explicação, o Sol está muito perto da Terra, e ela é plana. Então os raios solares não chegam paralelos à superfície e, então, os próprios raios criam essas sombras.



— O Sol está MUITO longe da Terra, e ela é esférica sim, quem acredita ainda que a Terra é plana? – interpôs Luca.

— Hoje sabemos que a Terra é esférica, e que o Sol está muito longe, mas como provar isso?

— Não sei, mas ela é esférica e o Sol está muito longe.

— Um sujeito chamado Aristarco de Samos descobriu que o Sol está muito longe, isso há uns 100 anos atrás – disse Eratóstenes. Que a Terra é redonda, também já temos essa ideia, mas não temos como saber qual o raio dela, ou qual sua circunferência. Mas acabei de pensar em algo.

— No que você acabou de pensar?

— Ora, se o Sol está muito longe, e ainda assim ele é tão visível olhando para ele, então ele realmente é

imenso. Então, posso considerar que os raios solares chegam paralelos à Terra. Se medirmos a sombra dessa estaca, e a sombra de uma estaca na outra cidade, no mesmo horário, podemos trabalhar com semelhança entre triângulos, e descobrir a circunferência da Terra. Marvim, consegue nos ajudar nessa?

— Espera! – Disse Luca – Tales usou esse mesmo raciocínio para medir a altura de uma pirâmide. Mas ele disse que se tentarmos medir coisas a longas distâncias, pode dar errado. É isso o que você vai usar?

— Exatamente isso. Agora Marvim, preciso da sua ajuda.

— Mas é claro! O que você quer que eu faça?

— Primeiramente, quero que hoje seja o solstício de verão, quando o Sol está em zênite.

— É para já! – com isso o tempo foi mudando, e Luca percebeu que a estaca, agora, não tinha sombra alguma.

— Perfeito! – Exclamou Eratóstenes – agora nos leve para essa cidade – apontando em um mapa.

E falando isso, eles foram teletransportados para longe.

— Onde a gente está? – Disse Luca.

— Estamos a 5000 estádios de distância.

— O que é esse estádio que você tanto fala?

— Nossas unidades de medidas padronizadas são diferentes das suas. A que a gente usa para longas distâncias é essa, estádios.

— E quanto isso vale em metros?

— Não sei.

— Segundo alguns estudos, a unidade estádio varia entre 156 e 210 metros, mas a que Eratóstenes usou mede aproximadamente 158 metros, segundo alguns estudos – interviu Marvim.

— Certo, então 1 estádio meu mede 158 metros, mesmo eu não tendo ideia do que é 1 metro, exatamente – disse Eratóstenes.

Com a calculadora de seu celular, Luca calculou a distância de 5000 estádios, com cada um dele medindo 158 metros.

— Então, estamos a quase 800 quilômetros de onde estávamos? – disse Luca.

— Sim, isso mesmo – confirmou Marvim.

— Então tudo bem, continue Eratóstenes, o que devemos fazer agora?

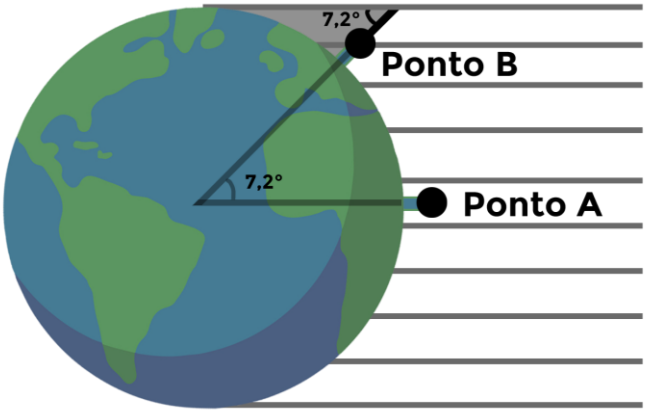
— Fincar essa estaca no chão, assim – disse Eratóstenes fincando à estaca no chão, e a ajeitando perpendicularmente ao chão – agora vamos medir esse ângulo.

— Qual ângulo?

— Você não percebeu que essa estaca agora faz sombra? Vou medir esse ângulo aqui, olhe – e desenhou à estaca com o ângulo.

— E o que fazemos com ele?

— Bom, vou continuar desenhando para facilitar, olhe só.



"Estávamos aqui, onde está marcado o ponto A. Agora estamos no ponto B, claro, meu desenho está fora de

escala e não está seguindo as medidas corretas, mas é só para você entender o que quero fazer.

"Sei que o ângulo entre a estaca e o raio de Sol é equivalente a 1/50 de um círculo, pois quando fiz isso há centenas de anos atrás, eu medi. Agora veja, se do ponto **A** ao ponto **B**, andamos 5.000 estádios, e com isso andamos 1/50 de um círculo, se multiplicarmos esses 5.000 estádios por 50, teremos o tamanho da Terra, e isso dá 250.000 estádios de circunferência!"

— Como você chegou em 1/50?

— Quando finquei à estaca no chão, medi o comprimento da sombra em proporção ao comprimento da vareta, fazendo uns pequenos cálculos, encontrei 7,2°, isso equivale a 1/50 de um círculo, pois 360° dividido por 7,2°, é igual a 50.

— Entendi, então com isso você chegou em 250.000 estádios, com cada um medindo 158m, o que nos dá 39.500 quilômetros de circunferência. Isso está certo Marvim? – disse Luca olhando para sua calculadora do celular.

— Sim! Está corretíssimo, a circunferência total da Terra é de aproximadamente 40.075km, porém Eratóstenes não chegou nesse resultado exato por

alguns fatores. O principal, como você pensou, é que ele só usou uma estaca e instrumentos de medida sem precisão. Hoje em dia temos instrumentos, como um laser calibrado com satélites, e máquinas que apuram medidas com a precisão de milímetros. Assim temos medidas mais precisas.

"Um outro fator se deve pela própria geografia do planeta. Ele não é uma esfera perfeita, é um geoide, algo irregular, achatado nos polos. E por último, uma cidade não está exatamente ao sul da outra, então há essas pequenas variações. Mas, fala sério! Errar a medida de um planeta inteiro em de 500km é algo surreal, até mesmo para os dias de hoje!"

— De fato, é algo impressionante! – disse Luca – mas me surgiu uma dúvida, como se sabe que a distância entre as duas cidades é de 5.000 estádios?

— Isso é algo que no começo foi cômico, mas me deu muito trabalho. Primeiramente eu iria usar camelos.

— Camelos?

— Isso mesmo, viajei com camelos de uma cidade a outra, e queria contar quanto tempo havia demorado, mas tive um pequeno problema: camelos são animais, logo, em alguns momentos vão mais rápido, em outros,

mais devagar, ou se perdem no meio do caminho. Foi um desastre.

— Então, desistiu deles?

— Sim, depois disso pedi ajuda ao rei para enviar seus melhores bematistas para ajudar a medir a distância entre as cidades.

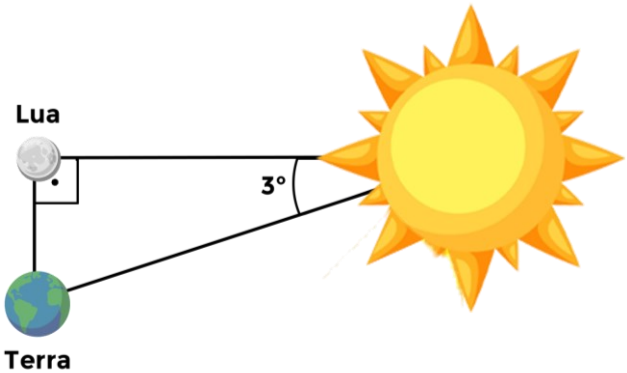
— Quem são eles?

— Eles são agrimensores, pessoas especializadas em medir distâncias. Essa profissão existe desde o Egito antigo. Quando os egípcios plantavam próximo ao Nilo e acontecia alguma enchente causada pelo rio, chamavam os agrimensores para medir a área devastada e assim calcular o prejuízo do agricultor. Mas esses aqui são diferentes, eles são treinados para caminhar com passos do mesmo tamanho. Então, sabendo quantos passos eles deram, o tamanho de seus passos, e com pequenas contas descobri a distância entre as cidades.

— Tem um detalhe, – interferiu Marvim – os manuscritos originais feitos por Eratóstenes, se perderam. Só temos registros de outras pessoas que contam esse fato, então não conseguimos saber exatamente quais eram suas contas, quais eram precisamente os números que usou.

— Entendo, mas puxa! Olha tudo o que você fez sem nenhuma tecnologia avançada, e chegou a um resultado, com erro minúsculo! Isso é impressionante mesmo! Mas, agora tenho uma dúvida, tinha citado um sujeito que mediu a distância entre a Terra e o Sol. Como ele fez?

— Foi o Aristarco de Samos. Como exatamente ele fez não sabemos, pois também perdemos todo o seu material. Mas Arquimedes descreveu seu trabalho e informou que ele também usou triângulos, analisando a posição da Lua. Quando ela estava em quarto minguante ou em quarto crescente, ela se encontra a 90° com a Terra, formando um triângulo com o Sol, nesse formato – e desenhou novamente.



"Segundo Aristarco, o ângulo que o Sol faz com a Lua e a Terra é de 3°. Como ele descobriu isso? Não

sei, mas com a tecnologia atual, recriando esse cenário, sabemos que, na verdade, esse ângulo é de menos de 1°. O erro se deve ao fato de não haver instrumentos precisos, na época. Ele afirmou que a distância entre a Terra e a Lua é de 40 diâmetros da Terra, mas também não tenho informações de como ele chegou a isso. Sabemos hoje que é de 30 diâmetros, o que é um erro pequeno. Por ter errado o ângulo, que em vez de 3°, deveria ser algo menor que 1°, Aristarco errou a distância entre a Terra e o Sol. Considerou que era de 19 distâncias da Terra até a Lua quando, na realidade, é de 380 distâncias da Terra à Lua. Para descobrir essa medida, aplicamos o que hoje é chamado de trigonometria, usando seno e cosseno para o cálculo."

— Mas se ele errou tanto assim, como pode dizer que o erro de Aristarco era pequeno?

— Primeiramente esses erros se dão pelos instrumentos usados, ou talvez a forma como ele mediu, mas não podemos afirmar por termos perdido seu trabalho. Porém, imaginamos que foi devido aos instrumentos muitos falhos, principalmente para distâncias tão grandes, como a distância entre a Terra e o Sol, algo tão grande que não existem comparações

que são compreendidas por nós, até hoje. Os resultados dele podiam estar totalmente errados, mas suas ideias estavam corretíssimas. Ele até propôs que a Terra girasse em torno do Sol, e não o contrário. Essa ideia só foi retomada com Nicolau Copérnico, a menos de 500 anos de hoje, e Aristarco já tinha essas ideias há mais de 2000 anos.

— Que sensacional!

— Sim! Bom, mais alguma dúvida?

— Tenho, que instrumentos ele usava?

— Sou apenas uma simulação, não tenho dados para dizer quais instrumentos os povos antigos usavam, porém é de se esperar que os povos que vieram depois deles usavam coisas semelhantes. Então você pode perguntar para pessoas um pouco mais especializadas em astronomia, os árabes, que surgirão daqui centenas de anos, e revolucionaram a forma de medir distâncias.

— Então tudo bem, Marvim, vamos vê-los?

— Podemos ir amanhã. Hoje acho que está tarde – disse o robô.

— Então acho que, por hoje, é só, até! – Falou Eratóstenes.

— Tchau Eratóstenes! Marvim, vamos?

— Claro! – disse Marvim. E lá estavam de volta à oficina de seu tio, onde encontrou Túlio resolvendo palavras cruzadas, e decidiu contar a ele tudo que aprendeu. Após isso voltou a sua casa.

Atividade 4

Agora que sabemos como Eratóstenes calculou a circunferência da Terra, é a sua vez, pegue o valor encontrado por Eratóstenes e calcule o diâmetro do planeta, com esse valor e a área de superfície, imagine que a Terra é uma esfera perfeita para isso.

Baseando-se no trabalho de Aristarco, descubra a distância entre a Terra e a Lua, e a distância entre o Sol e a Lua.

Circunferência calculada por Eratóstenes: 39500 km
Distância Terra-Lua: 30 diâmetros da Terra
Distância Terra-Sol: 380 distâncias Terra-Lua

V. Um novo... amigo?

Chegando em casa, Luca não conseguia dormir, então foi olhar o céu noturno, pensando na imensidão do universo. Pensou sobre se era possível usar o céu para se localizar, como se faziam nos filmes, e decidiu perguntar isso a Marvim no próximo dia.

Amanhecendo, como de costume, Luca vestiu seu uniforme e foi para a escola, chegando de lá, foi para a casa de seu tio Túlio.

— Oi tio!

— Oi Luca! Como você está? Qual será a viagem de hoje? Ou se cansou?

— Estou ótimo, e que história é essa de se cansar? Virei muitas vezes aqui, ainda.

— Entendo – disse Túlio rindo – pode vir sempre que quiser, mas onde você quer ir hoje?

— Não sei, vou ver com o Marvim. Falando nisso, onde ele está? Tenho uma dúvida para tirar com ele.

— O Marvim está lá dentro da máquina, vá encontrá-lo.

Luca entrou na máquina de ilusões e encontrou o robô adormecido. Percebendo a presença do menino, Marvim despertou.

— Oi Luca! Quer ir para algum lugar hoje?

— Eu quero, mas antes tenho uma dúvida.

— Então diga, qual dúvida é essa?

— Nas nossas viagens, muitas vezes se usou conhecimentos da astronomia, como as posições do Sol e da Lua. Com isso, Eratóstenes conseguiu medir a circunferência da Terra, os mesopotâmios fizeram seu próprio calendário, entre outras coisas. Mas só dá para fazer essas medidas em dias ensolarados, como nos filmes? Como fazer em um dia nublado? Ou com chuva?

— Isso é uma excelente dúvida! Em geral, os instrumentos de medição eram usados em dias mais limpos, por precisar ter um contato direto com o objeto

de interesse. Mas já que temos uma máquina de ilusões que pode simular qualquer coisa, por que não vamos até algum lugar para descobrir mais? Eu até sei onde, e vai fazer total sentido com nossas últimas viagens, quer conhecer os árabes?

— Vamos!

Ouvindo isso Marvim ligou a máquina, e tudo ao redor começou a mudar. Mas Luca reconhecia aquele lugar, já estivera lá antes.

— Marvim, você falou que iríamos ver os árabes, não os *mesopotâ*.... Espere, quem é aquele? – disse Luca com um brilho no olhar.

— Oi Luca! Sou o Rubo, serei seu guia hoje! Tudo bem com isso?

— Oi Rubo, tudo bem sim, quem você foi? Algum matemático famoso? Não estou lembrado de você – falou desconfiado.

— Não, na verdade eu sou anônimo para a história real. Eu nem existo, só fui criado nessa simulação, para te ensinar sobre os árabes.

— Me senti no direito – disse Marvim – de criar alguém da sua idade para te explicar sobre, mas caso você queira, posso reiniciar a simulação.

— Não, eu gostei dele, quero que ele fique. – Luca sorriu olhando para Rubo, ao mesmo tempo em que sentiu suas bochechas esquentarem, o que o deixou envergonhado, embora ele não tenha entendido o porquê. Mas ficou feliz de ter alguém da sua idade para acompanhá-lo em uma aventura.

— Então está decidido, vou ficar! – Disse Rubo, sorrindo para Luca, o que o deixou mais vermelho. Mas, continuando, você estranhou o Marvim ter dito que iria ver os árabes e o ter levado à Mesopotâmia. Para explicar isso, vou situar um pouco em que ano estamos e quando aconteceu suas viagens.

"Primeiro, você foi ao Egito, em uma época entre 2600 a.C. a 2500 a.C., após isso visitou os mesopotâmios, por volta de 1800 a.C., depois deu um pequeno salto no tempo, e conversou com Tales, em 600 a.C., Pitágoras, 550 a.C. e Eratóstenes, em 230 a.C. Claro que as datas são aproximadas, não temos os registros precisos de anos em que viveram, infelizmente."

— E agora? Em que ano estamos?

— Aproximadamente 700 d.C.

— Então faz quase 1000 anos desde a última vez que estive nessa simulação?

— Exatamente – Confirmou Rubo.

— Mas, o que aconteceu desde então?

— A matemática continuou evoluindo, da mesma forma que antes, mas vamos esquecê-la por um momento. Nessa época surgiram os árabes.

— Surgiram? Eles não existiam desde sempre?

— Não, o povo árabe se identifica de algumas formas, como pela religião, e foi por conta dela que se organizaram.

— Poderia explicar melhor?

— Tudo começou quando Maomé teve sua visão do anjo Gabriel e começou a pregar o islamismo, a crença em Alá e no seu livro sagrado, o Corão.

— Então, depois de Maomé é que surgiu o povo árabe?

— Isso mesmo, tem algumas disputas sociais, políticas e religiosas no meio e eu não vou me aprofundar nelas, mas vou falar algo sobre o Corão. Como na Bíblia, o Corão também possui seus mandamentos. Dois mandamentos, em específico, desencadearam estudos matemáticos árabes.

— Quais mandamentos?

— O primeiro diz que os mulçumanos devem orar voltados à Meca, que é a principal cidade sagrada do Islão, a religião pregada por Maomé. Além disso, o Corão diz que todo mulçumano deve peregrinar para essa cidade, ao menos uma vez na vida.

— E como isso se tornou problema matemático? – indagou Luca.

— Bom, estamos em 700 d.C. Como você se localizaria aqui sem GPS?

— Ah! Agora entendi o problema. Se eles não conseguissem se localizar, não conseguiriam cumprir os mandamentos do Corão. E como resolveram esse problema?

— Você teve essa mesma dúvida hoje, e resumindo de um jeito bem simples, eles usavam o céu para se localizar, a posição do Sol e das outras estrelas.

— E como eles conseguem usar o Sol ou outras estrelas para se localizar? Em cada hora do dia o Sol está em um ponto diferente no céu, e as estrelas também se movem, no que isso ajuda?

— Justamente pelo fato de que em cada hora do dia o Sol está em um ponto diferente do céu, é possível prever onde ele está.

— Mas como?

— O Sol sempre nasce no mesmo lugar, e se põe no mesmo lugar, com isso dá para saber onde ele estará em um horário específico. Desse modo, sabendo a direção de Meca, em relação ao Sol em um determinado horário, você sabe onde Meca está em qualquer horário. É só fazer algumas pequenas contas.

— E como eu sei a relação entre o Sol e Meca?

— Para isso existem diversos instrumentos de medições. Alguns deles são usados para medir o ângulo de um objeto em relação ao horizonte. Outros, para medir diretamente esse ângulo em relação a qualquer coisa.

— Que instrumentos são esses?

— Um deles é o astrolábio. Este aqui – e falando isso, começou a se materializar na frente de Luca um círculo de ferro, que lembrava um relógio de parede, com uma pequena alça para segurar em cima, e algumas partes móveis, como ponteiros, que apontam para

marcas graduadas na volta do círculo de metal. Luca se impressionou com isso.

— O que ele faz? Como ele funciona?

— Como eu disse, isso é um astrolábio. Você segura nessa alça, e mira para o que quer medir, olhando com ele de lado. Mexendo nessas peças que parecem ponteiros, consegue-se saber o ângulo de inclinação do objeto observado. Então, com esse ângulo, realiza algumas contas, e consegue saber a direção ou a sua distância em que o objeto se localiza.

— Então, usando esse instrumento é possível saber a distância até algo, sem precisar ir diretamente até lá? Ou conseguir me localizar vendo o ângulo entre o Sol e o objeto?

— Exatamente, você pode observar o Sol, alguma estrela, ou o topo de uma montanha, com a ajuda da matemática e de um mapa. Com essas informações você consegue saber onde está, e a direção para onde está indo. Esse instrumento também é usado em navegações marítimas.

— E tem algum instrumento mais simples que esse? – Disse Luca olhando para o astrolábio em suas mãos agora. – Ele parece complexo. Tem muitas informações

que não consigo entender. Tem os signos do Horóscopo nele, por quê?

— Esses signos, na verdade, representam as constelações. Em cada mês, uma constelação aparece no céu. Caso você vá utilizar as estrelas para se localizar, é preciso saber qual é a estrela e em que constelação ela está, para saber qual é a inclinação que você deseja. Mas existem instrumentos mais simples.

— Em todas as minhas viagens, foi falado sobre a trigonometria, e alguns de seus conceitos. Onde ela é aplicada aqui?

— No período medieval, como esse em que estamos, e os que você visitou, a trigonometria e astronomia eram bem semelhantes. Não existia a teoria trigonometria, como a conhecemos atualmente. Então, tudo o que era relacionado a inclinações e proporções de triângulos interessava aos astrônomos. Eles usavam noções de trigonometria em seus estudos. Resumindo, a trigonometria era uma ferramenta que os auxiliava na astronomia. Não uma teoria autônoma.

— Então toda a história da trigonometria antiga se resume à astronomia?

— Basicamente, a trigonometria era empregada em medidas relacionadas às estrelas, aos corpos celestes, ou às medidas de longas distâncias na Terra. Então, usava-se a trigonometria como ferramenta na astronomia, nas navegações, para medir distâncias longínquas, ou para saber inclinação de alguma coisa.

— Entendi, você poderia agora me mostrar o instrumento mais simples que você falou?

— Claro! Esse é um quadrante. Em frente ao Luca, começou a se materializar um pedaço de um círculo, que correspondia a um quarto da circunferência completa. Era como um triângulo, mas com um lado arredondado e com marcas de graduação nele. Do vértice do ângulo reto saía uma cordinha, um pouco maior que o raio do círculo, com um pesinho na ponta, chamado prumo.

— E como o quadrante funciona?

— Da mesma forma do astrolábio, mas esse você vai mirar usando o ângulo reto, e o prumo vai marcar o ângulo de inclinação e fazendo contas consegue descobrir qual é a direção, a distância, ou o tamanho do objeto observado. Resumindo, os dois instrumentos são semelhantes, mas o quadrante é um pouco mais

simples que o astrolábio. Ele é usado principalmente em navegações, para se localizar a partir das estrelas, então funciona melhor a noite. Já o astrolábio pode ser usado em qualquer horário, mas não implica que ele seja menos eficaz, apenas é usado em ocasiões diferentes.

— Acho que consegui entender melhor o quadrante. Existe alguma forma de testá-lo?

— Claro, Marvim, crie uma montanha para nós, por favor.

— É para já! – Dizendo isso, a paisagem começou a mudar, e de uma cidade, foram parar em um campo com uma montanha ao fundo.

— Está vendo lá, Luca? – Disse Rubo apontando para uma montanha no horizonte – Vamos medir a altura daquela montanha. A única informação que temos é que a nossa distância até ela é de 5 Km.

— E como vou fazer isso?

— Use o quadrante que está em suas mãos. Aponte-o para o topo da montanha e meça o ângulo que o prumo marcar.

Ouvindo isso, Luca pegou o quadrante e mirou o topo da montanha. Estava com um pouco de medo de decepcionar Rubo, sem entender o porquê, já que ele

era apenas uma ilusão. Mas respirou fundo e conseguiu mirar, percebendo o prumo ficar parado, e ouviu Rubo dizendo:

— Muito bem! Estou orgulhoso de você. Agora fixe a linha na marcação onde ela parou, segure com a mão mesmo, e me diga qual ângulo ela marcou.

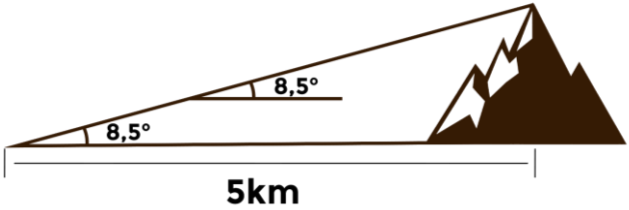
Luca então segurou a cordinha, fixando-a no quadrante para ver onde estava marcando.

— Em 8,5°, Rubo. É isso mesmo?

— Se você mediu isso, então é isso. Ou quer conferir mais alguma vez?

— Prefiro – Luca então repetiu o processo e percebeu que marcou o mesmo ângulo, orgulho de si mesmo.

— Certo – continuou Rubo com uma folha de papel em suas mãos – Vou desenhar para ficar mais fácil de entender. Aqui estamos nós, aqui está a montanha, e esse ângulo aqui embaixo, mede 8,5°. Ligando onde estamos, com a base da montanha e seu cume, temos um triângulo retângulo com um ângulo de 8,5°, e com cateto que mede 5 km. Queremos saber qual a altura da montanha, ou seja, o tamanho do cateto oposto.



— Eu sei fazer isso, é só usar a tangente do ângulo!

— Isso mesmo! Antigamente ainda não se usava esse nome, mas já se sabia dessa proporção. Para o cálculo acharemos o valor da tangente do ângulo em uma Tábua de Cordas, fazendo apenas uns pequenos ajustes.

— Tábua de Cordas? O que é isso?

— Amanhã posso te explicar, caso queira. Mas simplificando, seria do que hoje você chamaria de tabela com valores para o seno de um ângulo.

— Certo, eu sei que basta fazer tangente de 8,5° vezes 5 km. Assim, teremos a altura da montanha, mas como eu sei qual é o valor da tangente desse ângulo? Eu só sei a dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Dos outros ângulos, eu não faço ideia.

— Com a tábua de cordas conseguimos descobrir o valor aproximado dessa tangente. Nesse caso, o valor da tangente de 8,5° é de, aproximadamente, 0,15. Agora é só fazer as contas.

— Isso dá 5 km vezes 0,15.... A montanha tem 750 m de altura?

— Isso mesmo, na verdade tem quase 800 metros, pois quando medimos foi a partir da altura de seus olhos e não do chão, há um pequeno erro de medição pela limitação do instrumento, como esperado e pelo valor da tangente não ser exato. Mas, para uma aproximação, esse valor está excelente. Estou muito orgulhoso de você, Luca – disse Rubo um pouco envergonhado.

— Esses instrumentos foram criados só por conta do dever religioso de saber a direção de Meca?

— Possivelmente não foram os árabes que os inventaram. Foram inventados antes deles, não temos nenhum registro. Sabemos, apenas, que quando o povo árabe surgiu, diversas obras matemáticas dos egípcios, mesopotâmios, indianos, chineses e, principalmente, dos gregos, foram traduzidas e os conhecimentos foram aperfeiçoados pelos árabes. Por isso, eles estão presentes em diversas ciências, como na medicina e na matemática. Então, é de se imaginar que esses instrumentos foram criados por povos mais antigos, e os árabes os aprimoraram.

— Isso é incrível! Tem algo mais que queira me contar?

— Por hoje acho que temos muitas informações. Por que não mostra o quadrante para o Túlio? Com um pouco de criatividade, usando um transferidor, você consegue criar o seu próprio.

— Está bem! Tchau Rubo, quero te encontrar amanhã, adorei te conhecer.

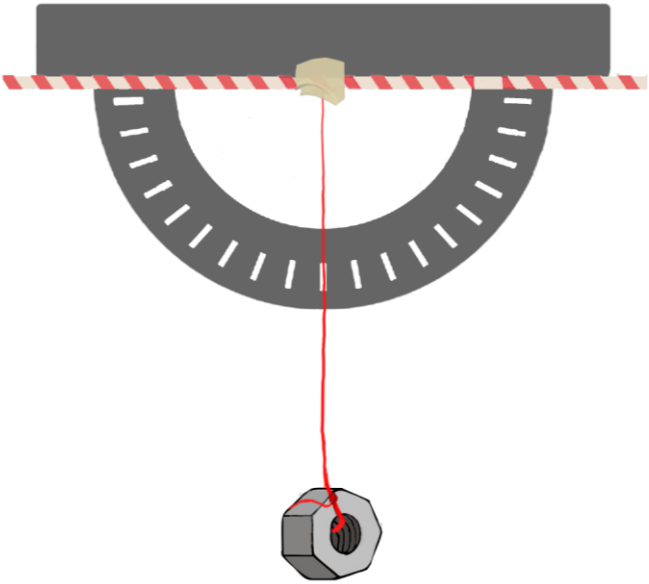
— Digo o mesmo Luca, até!

Com isso a simulação terminou e Luca estava de volta à oficina de seu tio. Contou a ele a sua aventura, e juntos construíram seu próprio quadrante. Após isso, Luca voltou para casa, ansioso para reencontrar seu novo amigo no dia seguinte.

Atividade 5

Existem diversos instrumentos de medição, eles são usados na agrimensura, na construção civil, na agricultura, na meteorologia, entre diversas outras aplicações. Um instrumento mais atual é o teodolito, que tem uma função semelhante ao quadrante, porém utiliza de ferramentas óticas, como lentes e espelhos, para facilitar a leitura das medidas, deixando-o mais preciso, mas sofisticado demais para ser construído em casa. Então Luca criou algo bem mais simples. Segundo as dicas de Rubo, ele utilizou somente um transferidor, uma linha, uma porca para simular o prumo, e um canudo de refrigerante. Com isso, criou o seu próprio quadrante.

Luca amarrou a porca em sua linha, e prendeu no transferidor utilizando uma fita adesiva, de modo que a linha fosse fixa no centro do transferidor. Prendeu, também, o canudo de refrigerante com fita adesiva de modo que ele se alinhe na direção 180° - 0°. Este desenho é uma representação do que Luca fez.



Para observar um objeto, Luca deve usar o canudo como mira (olhando por dentro dele até encontrar o objeto). O transferidor vai se inclinar, conforme a direção do objeto, mas a linha sempre estará esticada na vertical, marcando um ângulo.

Existe só uma pequena observação a se fazer sobre o ângulo, no caso, o transferidor de Luca, quando está reto sem medir nada, sua cordinha marca 90°, mas o que precisamos é da diferença de inclinação entre o ângulo medido e 90°. Então, caso ele leia uma medida

de 110°, é preciso calcular a diferença entre 110° e 90°, que resulta em 20°.

Agora com o seu quadrante feito, tente medir a altura de sua casa, de uma árvore, um prédio, siga as instruções presentes no capítulo e divirta-se!

VI. Salão histórico

Em casa, pronto para dormir, Luca começou a refletir sobre o seu dia. Estava contente por ter tido um excelente dia, e mais ainda pelo dia seguinte ser sexta-feira. Dormiu feliz, sonhou com suas viagens, lembrou-se do antigo Egito, da Grécia, da Mesopotâmia – que agora fazia parte do Império Árabe. Isso o fez lembrar de Rubo. Gostou muito do seu novo amigo e imaginou viagens futuras que poderia fazer com ele. Em sua mente voltou a falar com Tales, e lembrou-se que ele falou sobre semelhanças de triângulos e que a trigonometria usava isso. Mas Marvim ainda não lhe contou como.

Acordou, se arrumou e foi para a escola. Lá lembrou-se de seu sonho, decidiu-se a fazer Marvim lhe contar sobre onde, de fato, os povos antigos aplicavam a trigonometria. Luca sabia que tinha relação com a astronomia, mas não como ela evoluiu e chegou ao que é hoje. Porém, no fundo, ao invés de Marvim te contar isso, preferia que fosse o Rubo. Quando chegou em casa, almoçou e trocou de roupa. Após isso foi direto para a oficina de seu tio.

— Oi Túlio, tudo bem? – Disse Luca.

— Oi Luca! Comigo está tudo ótimo, como foi a escola? Vai ter algum trabalho para fazer nesse fim de semana?

— Na escola tudo bem, não vou ter que fazer nenhum trabalho nessa semana, vou ficar livre! – disse rindo.

— Que ótimo! Bom, tenho que arrumar alguns projetos meus, fique à vontade e divirta-se!

Após falar isso, Túlio pegou algumas ferramentas e começou a mexer em algumas máquinas que Luca não sabia para o que serviam. Então deixou Túlio com suas invenções e foi ao encontro de Marvim para questioná-lo sobre sua promessa não cumprida.

— Oi Marvim! Tem algo que você está me devendo, não acha?

— Oi Luca! O que seria exatamente?

— Lembra quando visitamos Tales? Ele disse que você me contaria sobre o seno, e o que a trigonometria e a semelhança de triângulos têm em comum.

— Ah, certo. Vejamos, para isso temos que voltar à Grécia, um pouco depois de Eratóstenes. E depois visitaremos outros matemáticos, cada um em sua época específica. Então, para facilitar, vou juntar todos em um mesmo lugar. Posso começar a contar essa história?

— Ainda não, onde está Rubo? Se não te incomodar, prefiro que o Rubo conte essa história. – Após dizer isso, Luca sentiu suas bochechas esquentando.

— Por mim não há problema algum! Vamos entrar na máquina de ilusões. Rubo estará lá para te ensinar tudo.

Entraram na máquina de ilusões e, após Marvim apertar o botão para iniciar a simulação, tudo começou a mudar. Mas, diferente das outras viagens, foram parar em um salão que lembrava a galeria de um museu. Esse salão era arredondado, e havia grandes portas que não faziam sentidos lógicos. Cada porta parecia ter um

mundo próprio dentro delas. Acima de cada uma havia o nome de civilizações para onde elas levavam. Luca conseguia ler: Egito, Mesopotâmia, Grécia, mas, quando viu a porta que levava aos árabes, sentiu-se feliz. Pensou em correr para procurar Rubo, mas isso não foi preciso, já que no meio do salão Rubo apareceu como se ele tivesse sido teletransportado para lá.

— Oi Luca! Está tudo bem? – Disse Rubo – Senti saudades suas – completou envergonhado.

— Oi Rubo! Estou muito bem, também senti saudades suas.

— Fiquei sabendo que você quer descobrir o que a trigonometria e a semelhança de triângulos têm em comum.

— Isso, você poderia me ensinar?

— Claro! Como você percebeu, existem diversas portas aqui nesse salão, acho que você já sabe o motivo disso.

— Porque a trigonometria foi usada por todos esses povos?

— Isso mesmo, mas tem só um pequeno erro na sua frase. Demorou muito para chamarem o que faziam de trigonometria, mas isso é uma outra viagem.

Primeiramente, vou te contar sobre como a semelhança de triângulos era usada e depois como isso se tornou a trigonometria.

— Tudo bem, onde vamos primeiro?

— Para o Egito, por volta de 150 a.C. Vamos encontrar uma pessoa chamada Hiparco.

Luca e Rubo foram juntos até o portão com uma enorme placa escrita Egito. Marvim decidiu sentar-se e deixar os dois a sós, então ele materializou uma cadeira, uma mesa, e um tabuleiro de xadrez sobre a mesa. Como ele é um supercomputador, decidiu usar seus processadores para ver todas as possibilidades do jogo.

— Chegamos, estamos em Alexandria – disse Rubo – e olhe, ali está Hiparco – apontou para um senhor barbudo com um cabelo enrolado e curto.

— Olá crianças! – disse Hiparco – sei que vocês querem aprender sobre meu trabalho.

— Oi! – respondeu Luca – adoraria!

— Tenho um grande interesse em astronomia, em catalogar as estrelas. Também tive interesse em calcular quanto tempo dura um ano, ou um dia, em como se localizar na Terra, com as coordenadas, mesmo que esse conceito, de fato, só tenha sido criado depois de

mim. E para calcular tudo isso, eu usava um círculo e uma reta secante, que é uma reta que corta o círculo em dois pontos.

— E como esse círculo cortado pela reta te ajudava?

— Se tiver um círculo e uma reta secante, criamos um segmento de reta que chamamos de corda, e eu usava a medida da corda para fazer meus cálculos.

— Mas, eu posso ter uma corda pequena, outra gigante, meu círculo pode ser minúsculo, ou enorme, como você fazia exatamente?

— Primeiro que eu usava um círculo com raio igual a 60.

— Por que 60 e não 10? Ou 100?

— Como você sabe, os mesopotâmios tinham o sistema de numeração sexagesimal, isto é, de base 60, e como tinha a influência cultural desses povos, acabei adotando esse sistema. Continuando, nesse círculo eu traçava a reta que determinava a corda, que vou chamar de corda **AB,** e depois, ligava os pontos **A** e **B** ao centro do círculo, que vou chamar de ponto **O**. Então eu media o ângulo **AÔB**, e a corda **AB**. Assim, eu tenho o valor da corda e o valor do ângulo, e como eles estão relacionados entre si, se eu souber o valor da corda,

saberei o valor do ângulo e vice-versa. É claro que é preciso ter cuidado por conta do tamanho do raio do círculo. Para facilitar, vou desenhar o que eu fiz.

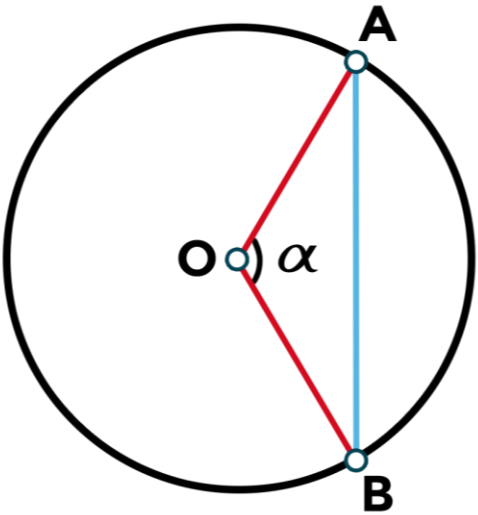
— E vocês usavam que tipo de medida de ângulo?

— De novo, por influência mesopotâmica, dividíamos o círculo em 360 partes, os chamados graus, cada grau era dividido em mais 60 partes, que são os minutos, e cada minuto é dividido em mais 60 partes, que são os segundos. Então, era o sistema sexagesimal que eu usava: graus, minutos e segundos.

— É a mesma coisa que usamos hoje em dia! Agora, posso ver o desenho?

— Claro! Está aqui.

Luca pegou a folha com o desenho de um círculo com raio 60 e, de fato, tinha uma linha – a corda – dentro dele, cujas extremidades estavam ligadas ao centro do círculo.



— Então, basicamente, era isso o que você fazia?

— Sim, eu media o tamanho dessas cordas e dos ângulos, e coloquei esses valores em uma tabela, chamada de tabela de cordas. Não temos muita criatividade com nomes, acho que você já reparou nisso.

— Eu até gosto das coisas assim, pois daí basta ler o nome para sabermos do que se trata – disse Luca, rindo. – Então essas cordas facilitavam as suas contas, por isso são tão importantes?

— Exatamente.

— E como isso se relaciona com a semelhança de triângulos?

— Eu usava um círculo de raio 60. Caso tivesse outro problema com um círculo de raio 10 vezes maior, só precisaria multiplicar os valores da tabela de cordas por 10, e então eu já teria o tamanho da corda desse problema específico. Para entender isso, basta perceber que o triângulo dessa figura é semelhante ao triângulo de um círculo de raio 10 vezes maior, porque todos os ângulos são iguais. Isso vale para quaisquer outros círculos e cordas.

— Tudo fez sentido agora! Quem mais calculava cordas?

— Tem um sujeito chamado Ptolomeu, que as usou, olhe ele ali – falou apontando para outro senhor barbudo, mas esse tinha algo na cabeça que se assemelhava a uma touca – vão conversar com ele.

Ouvindo isso, Rubo e Luca foram ao encontro de Ptolomeu.

— Olá! – disse Ptolomeu – ouvi parte da conversa entre vocês e Hiparco, então pressuponho que queiram saber sobre meu trabalho, também.

— Isso mesmo – disse Rubo, e Luca confirmou com a cabeça.

— Primeiro devo esclarecer que Hiparco foi da época de 150 a.C., eu sou de 150 d.C., ou seja, 300 anos após Hiparco.

— Tudo bem – Luca falou – estou me acostumando com esses saltos no tempo.

— Voltando agora ao meu trabalho, como Hiparco, eu também tinha interesse na astronomia. Inclusive tem um teorema que leva meu nome, pois eu o usava para realizar em algumas contas. Como Hiparco, eu também usava a tabela de cordas. Tanto este teorema como a tabela, são úteis em vários cálculos que os matemáticos fazem.

— Então, assim como Hiparco, você tinha o conhecimento sobre as relações entre cordas e ângulos. Mas, desenvolveu algumas outras coisas para facilitar, ainda mais, seus cálculos?

— Sim e além disso eu escrevi um livro que chamei de *Síntese Matemática*, conhecido entre os árabes por *Almagesto*, que significa *A Grande Obra*. É um livro onde eu juntei em uma obra só praticamente tudo o que sabíamos sobre astronomia.

— Então você resumiu toda a astronomia e a colocou em um só livro?

— Não diria toda a astronomia, mas, basicamente, esse é um dos livros mais importantes sobre a astronomia da Antiguidade. Nele tive interesse em catalogar as estrelas, calculando tabelas astronômicas e corrigindo as anteriores, para serem mais precisas. Além disso, há um capítulo no qual eu falo sobre o sistema solar, onde considerei, assim como era comum em todo o mundo antigo, que a Terra ficava parada e o Sol girava em torno dela.

— Mas isso está errado!

— Sim, está, porém meus cálculos matemáticos estavam certos. Por isso foi tão difícil provar o contrário. Essa ideia perdurou por centenas de anos. Ficou conhecida por Modelo Ptolomaico. Não que eu o tenha criado do zero, já que todos os astrônomos antigos acreditavam nessa ideia, mas por eu o ter publicado no *Almagesto*, especificando os detalhes.

— Então, resumindo, Hiparco usava a tabela de cordas. Depois você também a usou, mas a melhorou, aplicando algumas outras ferramentas matemáticas.

Além disso, escreveu o *Almagesto*, esse importante livro sobre a astronomia antiga.

— Isso mesmo! Acho que por aqui vocês aprenderam o bastante.

— Obrigado!

Dizendo isso, Luca e Rubo saíram juntos, voltaram ao salão e encontraram Marvim sentado a uma mesa, com um peixe em um aquário e um tabuleiro de xadrez na sua frente.

— Está tudo certo, Marvim?

— Tudo sim, eu tinha decidido que jogaria todos os jogos de xadrez possíveis. Mas antes de começar, calculei quantas possibilidades existiriam. E existem mais possibilidades de jogos de xadrez do que átomos no universo. Então, desisti dessa ideia e pedi ajuda para esse meu amigo, o *Stockfish*, o software de xadrez mais potente da atualidade, para jogar algumas partidas comigo.

— Espero que você esteja se divertindo.

— Eu estou, e quase ia me esquecendo, agora vocês visitarão a Índia dos anos 500 d.C. A história de vocês continua lá.

— Obrigado, Marvim! Rubo, vamos?

— Claro! Lá encontraremos Ariabata.

Com isso, foram em direção à porta da Índia. Entraram por ela e viram um homem sentado usando uma régua e um compasso. Diferente de Ptolomeu e Hiparco, este não possuía barba, mas tinha longos cabelos.

— Olá! – disse Ariabata – estava esperando vocês.

— Oi! No que está trabalhando?

— Como os matemáticos que já visitaram, estou trabalhando com astronomia. Esse é meu trabalho. Calculei a duração de um ano. Eu já acreditava no heliocentrismo, modelo em que é a Terra que gira em torno do Sol. Além disso, descobri como ocorre um eclipse, em que a lua reflete apenas a luz do sol.

— Deixa eu adivinhar, você também usava a mesma tabela de cordas, como Hiparco e Ptolomeu?

— Um pouco diferente, criei a minha própria.

— Mas não é a mesma coisa?

— Quase. Tem algumas diferenças.

— Quais são elas?

— O raio que eles usavam era 60, eu usava o raio sendo igual a 3438.

— Mas que número feio! Não tinha outro?

— Esse número pode ser feio, mas facilitou meus cálculos, por isso eu usava o usava. Ele é equivalente a 60 vezes 360 dividido por 2π

— Mas ainda sim é feio.

— Sim, para o valor do raio é feio, mas agora calcule o valor da circunferência desse círculo.

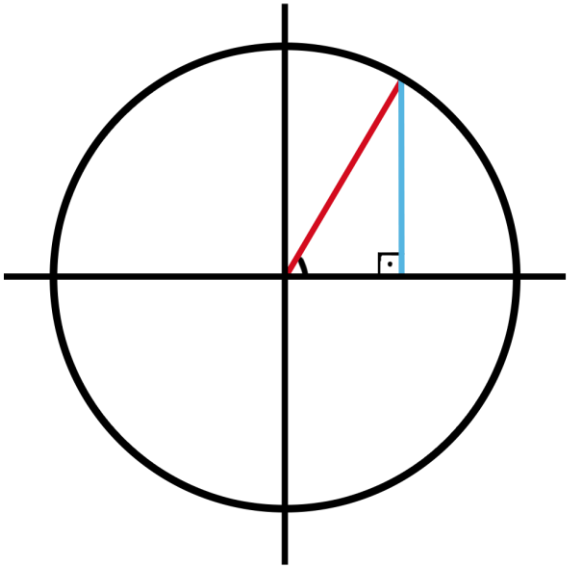
— A circunferência é 2 vezes o π vezes o raio, espera, o 2π do denominador vai cancelar o do numerador, então a circunferência vai medir 60 vezes 360?

— Isso mesmo! O raio tem um valor bem feio, mas uma das formas de medirmos os ângulos, é medindo o arco da circunferência correspondente ao ângulo central. Então, esse valor muito feio e todo quebrado, facilitava muito a minha vida na hora de calcular as medidas de cordas. Pela circunferência ser igual a 360° vezes 60, cada divisão representa um ângulo de um minuto. O arco cuja medida é de 60 divisões, representa um ângulo de 60 minutos, ou 1°.

— E então você fazia a mesma coisa que Ptolomeu e Hiparco, de medir a corda e associar ao ângulo?

— Mais ou menos. A diferença, agora, é que eu media a **meia corda**, ao invés da corda inteira, como

nesse desenho. Em meu idioma, o hindu, **meia corda** seria traduzido como *JYA-ARDHA*, mas como é cansativo escrever tudo isso, a gente escrevia só *JIVA*. Isso é muito importante para o futuro dessa história. Sobre os ângulos, não usávamos qualquer um, usávamos somente os múltiplos de 3 graus e 45 minutos de ângulo.



— Então, você media a corda no círculo, mas em vez de medir a corda toda, media só metade dela e usava alguns ângulos específicos, e chamava isso de *JIVA*?

— Isso, agora vocês podem visitar os árabes para continuar a história, caso queiram.

— Claro. Obrigado, Ariabata!

Foram então visitar os árabes e isso fez Luca lembrar do dia anterior, quando viu Rubo pela primeira vez, o que o deixou um pouco ansioso. Chegando lá encontraram um senhor com barba branca, e um grande turbante na cabeça.

— Oi! Meu nome é Al-Battani, estamos em 900 d.C. aproximadamente, e vocês estão aqui para saber mais sobre o meu trabalho, certo?

— Oi, sim, sobre isso mesmo!

— Tudo bem, fui um matemático árabe que descobriu várias propriedades que, no futuro, seriam conhecidas como as relações trigonométricas. Como Ariabata, eu também me interessava por astronomia e usava a meia corda em meus cálculos.

— Então qual mudança houve?

— Primeiro no nome – a chamada *JIVA*, em árabe, é escrita como *JIBA*, o **V** tem som de **B** para nós – além disso, em alguns casos, não escrevemos as vogais. Isso ocorreu no meu trabalho. Então *JIVA*, que agora é *JIBA*, foi escrita por *JB* em meu trabalho. Quem

estivesse lendo, completaria as vogais por conta própria.

— Então, a diferença era que a meia corda usada por Ariabata agora é escrita por *JB*, isso?

— Sim, e isso se deve ao fato de que quando o Império Árabe se organizou, traduzimos livros importantes, de diversos outros povos, por interesses comerciais, sociais, científicas ou de outro tipo. Mas, além da tradução, desenvolvemos os conhecimentos adquiridos, adaptando-os e deixando-os mais precisos. Quando traduzimos o trabalho de Ariabata, fizemos mais uma pequena mudança: lembra que Ariabata usava o raio com uma medida um tanto feia? Como aquele número não era prático, o mudamos. Agora usamos uma circunferência de raio 1.

— A circunferência de vocês possui raio 1, e mediam o *JB*, mais alguma mudança?

— Continuamos desenvolvendo a matemática como todos os outros povos, mas na trigonometria, essa é a única novidade no momento.

— Então tudo bem! Obrigado!

Após isso, Luca e Rubo saíram para encontrar Marvim no salão central. Marvim disse para irem à

Europa, mais ou menos no ano de 1150, e que lá aconteceria a última parte da viagem. Então os garotos foram em direção à porta da Europa. Entrando lá, encontraram-se em uma biblioteca, onde um homem estava ao lado de uma pilha de livros. Ele lia um livro e, aparentemente, fazia anotações em outro. Os livros estavam em idiomas diferentes, o que Luca estranhou. O homem estava lendo um livro com símbolos que Luca não entendia, e escrevendo usando letras do alfabeto que Luca entende.

— Olá! Quem é você? O que está fazendo?

— Olá jovens, me chamo Gerardo, Gerardo de Cremona, estou trabalhando.

— O que você está escrevendo?

— Estou copiando esse livro.

— Como pode estar copiando se está diferente?

— Sou um tradutor, estou transcrevendo esse livro do árabe para o latim.

— Não é muito trabalhoso fazer isso?

— É, mas o que posso fazer? Não existiam computadores ou impressoras nessa época, então tenho que fazer esse trabalho manualmente.

— Esse livro que está traduzindo, o que diz ele?

— Está falando sobre medir a baía de um círculo, enseada de um círculo, não entendi muito bem.

— Isso não faz sentido, está escrito baía mesmo?

— Não sei se vocês sabem, os árabes não escrevem as vogais das palavras, em alguns casos, então eu tenho que adivinhar quais são para completar as palavras.

— Mas o que exatamente está escrito?

— Está escrito *JB*. Caso isso faça algum sentido para vocês. Para mim essa palavra é *JAIB* que, traduzindo, significa baía ou enseada.

— Rubo, não foi isso que Al-Battani acabou de falar para nós? – perguntou Luca.

— Sim, é isso mesmo – respondeu Rubo para Luca, e complementou – Gerardo, aí não está escrito *JAIB*. Está escrito *JIBA*, que vem do hindu *JIVA*, que é como os matemáticos hindus escreviam meia corda.

— Uau! Bem, isso faz mais sentido – disse Gerardo – porém, agora não podemos corrigir nada, pois sou só uma simulação. Não conseguimos mudar o passado. Mas tudo bem, os futuros matemáticos aceitaram esse erro de tradução e o usam até hoje.

— Usam o quê?

— O nome que dei, traduzi esses textos para o latim, e *JB* foi traduzido para o latim *sinus*, que quer dizer baía ou golfo. Os matemáticos do futuro devem ter gostado da tradução, pois usam *sinus* até hoje. Em português fizeram uma pequena alteração, chamando de seno.

— Espera! O seno que eu aprendo na escola, vem de um erro de tradução da palavra *JB*?

— Sim, e ninguém arrumou isso. Bom, se não tiverem mais nenhuma dúvida, tenho muito trabalho a fazer. Até! – disse Gerardo olhando para a pilha de livros em sua frente.

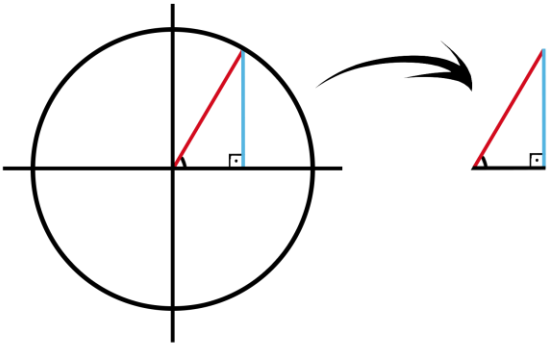
Eles saíram em direção ao salão central e Luca disse:

— Marvim, sabia que a palavra seno vem de um erro de tradução? E parou de jogar xadrez?

— Sobre o xadrez, empatamos muitas vezes, então cansei de jogar. Sobre a tradução, sim, seno vem de um erro de tradução.

— Mas, a história que eu ouvi falava sobre círculos e cordas. E na escola falam sobre triângulos. O que uma coisa tem a ver com a outra?

— É a mesma coisa, é só ignorar o círculo por um momento. Vou desenhar para você entender, olhe:



"Ali está o triângulo que você aprende na escola quando seu professor introduz a trigonometria. Em um primeiro momento, os matemáticos só se importavam com a medida da meia corda do círculo, porém no futuro perceberam que seria mais simples se, em vez de usarem o círculo, trabalhassem só com o triângulo retângulo. Como o círculo tem raio igual a 1, esse triângulo possui hipotenusa igual a 1. Por esse fato digo que a trigonometria é uma aplicação especial de semelhança de triângulos."

— Agora tudo faz sentido! – disse Luca. – Então aí temos o círculo trigonométrico?

— Em partes, quando a matemática avançou mais ainda, os matemáticos começaram a olhar para o passado e relacionar o ângulo com o seno, que é a meia corda no círculo. A partir disso criaram as funções

trigonométricas. Mas posso te contar amanhã? Já está ficando um pouco tarde. Talvez amanhã o Túlio possa vir junto, já que será sábado.

— Tudo bem – falou Luca um pouco triste, olhando para Rubo.

— Relaxa! – disse Rubo – amanhã estarei aqui te esperando! – Luca sorriu.

— Tchau! Até amanhã!

A simulação desligou, Luca estava de volta à oficina de seu tio, e havia um cheiro de queimado.

— Túlio? Está tudo bem?

— Está sim, só ocorreu um pequeno problema e explodiu uma invenção minha. Vou ter que esperar chegar novas peças eletrônicas que comprei. Mas e na sua viagem, deu tudo certo?

— Deu sim! – Luca então contou a Túlio sobre seu dia – Já que você vai ter que esperar chegar suas encomendas, quer vir amanhã comigo para uma viagem? Será sábado, tire um dia de folga.

— Estou precisando mesmo, para onde você vai amanhã?

— Depende do Marvim, mas vou para casa agora, tchau!

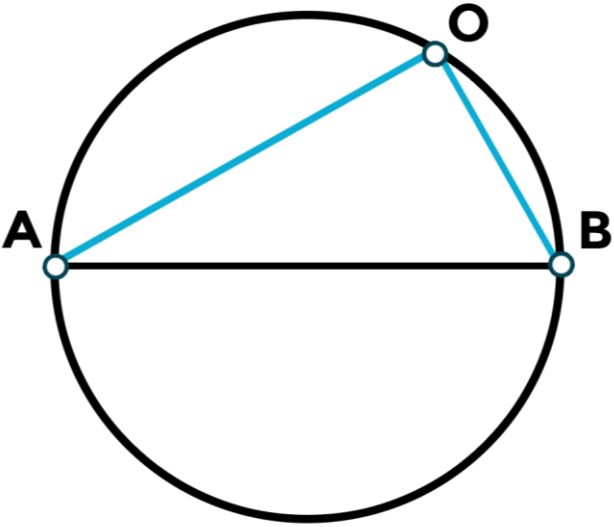
— Tchau Luca! Até amanhã!

Luca então foi para a sua casa. Chegando lá decidiu brincar com alguns círculos, medindo o tamanho de cordas e ângulos, e criando sua própria tabela de cordas. Lembrou também da promessa de Rubo, que ele estaria lá, com ele, amanhã, e imaginou onde seria sua viagem, adormeceu depois de algum tempo.

Atividade 6

Como vimos, Hiparco e Ptolomeu criaram uma tabela de cordas, que hoje também chamamos de tabela de senos. Não temos acesso a como exatamente eles mediram essas cordas, mas sabemos o que elas representavam e como, possivelmente, eles a calcularam. Uma suposição para como eles faziam era semelhante à dessa atividade.

Comece pegando uma folha e desenhe um círculo com o raio igual a 5cm. Poderia ser outra medida qualquer, porém 5 cm facilitará seus futuros cálculos. Após isso, trace o diâmetro, que chamaremos de linha AB. Agora, na circunferência, marque qualquer ponto que você quiser, vamos chamar de ponto O. A figura abaixo mostra o que fizemos até agora, lembrando que a linha AB possui 10 cm, já que o raio da circunferência mede 5cm.



Agora seu objetivo é medir o ângulo AÔB. Possivelmente você vai estranhar, mas esse ângulo tem exatamente 90°, não importa onde o ponto O esteja. Um desafio que deixo é tentar descobrir o porquê isso acontece, caso queira alguma ajuda, peça a seu professor de matemática.

Sabemos que o ângulo AÔB mede 90°, então temos que o triângulo AOB é um triângulo retângulo, com a hipotenusa sendo AB (medindo 10 cm). Agora, para a criação da tabela de senos, vamos lembrar que o seno é

o cateto oposto sobre a hipotenusa, a hipotenusa mede 10cm, só precisamos marcar um dos ângulos agudos do triângulo e saber a medida do cateto oposto a esse ângulo.

Agora devemos medir o tamanho do ângulo BÂO, não temos como saber qual é a medida desse ângulo, então, precisamos medi-lo usando um transferidor. Feito isso, medimos o comprimento da corda BO, já que essa corda é o cateto oposto ao ângulo BÂO. Desse modo, calculamos a medida de BO dividido por 10 cm, que é a hipotenusa do triângulo. Assim, temos que o valor do seno de BÂO é igual ao cateto oposto a esse ângulo dividido pela hipotenusa, ou seja, seno de BÂO é igual a BO dividido por AB.

Para saber se sua conta deu certo, basta conferir o valor encontrado em uma calculadora (seu celular tem uma).

Mas e agora, como construir a sua própria tabela de senos? Bom, generalizando o que fizemos, descobrimos o ângulo BÂO e a medida da corda BO. Para isso, primeiramente, criamos um ponto O. Mas podemos fazer de outra forma, primeiro criamos o ângulo BÂO com a ajuda de um transferidor. Após isso,

descobrimos onde o ponto O se encontra na circunferência e fechamos o triângulo ABO. Medimos então o cateto BO e o dividimos pela hipotenusa (10cm).

Caso repita esse processo diversas vezes, terá o valor para diversos senos, lembrando que esses valores não são exatos. Porém esse valor é suficientemente próximo para realizar as contas do dia a dia, a menos que você tenha que usar um valor com uma precisão específica.

VII. A história se repete...

Como era sábado, Luca aproveitou e dormiu até mais tarde. Acordou na hora do almoço, então se arrumou e almoçou. Após isso, foi jogar um pouco. Gostava de um jogo de simulação de fazenda, e dera o nome de Rubo para seu coelho. Depois de passar algumas horas jogando, foi para a casa de seu tio, pronto para continuar sua jornada na história da trigonometria.

— Oi tio! – exclamou Luca quando chegou na casa de Túlio.

— Oi Luca! Como vai?

— Vou bem, então, vai fazer algo hoje?

— Vou acompanhá-lo em sua viagem, para onde vamos?

— Não sei para onde Marvim vai nos levar hoje.

— Então vamos perguntar a ele.

Dizendo isso, Túlio levantou-se, foi em direção a máquina de ilusões, e então entrou nela.

— Oi Marvim! – disse Túlio – aonde vamos hoje?

— Olá! Para hoje preparei algo bem especial!

Tudo em sua volta começou a mudar, estavam em um imenso corredor, aparentemente sem fim, com infinitas portas, o que intrigou Luca. Então Marvim disse: — Preparados?

— Mas o que é isso tudo, Marvim? – perguntou Luca.

— Isso eu chamo de corredor do conhecimento. Vamos recapitular tudo o que aprendemos até agora, e ver como isso afetou o futuro. Tudo bem para vocês?

— Tudo bem, mas cadê o Rubo?

— Quem é Rubo? – perguntou Túlio a Luca.

— Bom, ele é meu novo amigo – disse Luca envergonhado – Marvim quem nos apresentou e eu gostei muito dele.

— Entendi, por isso você estava vindo aqui diariamente, não?

— Não tio, é que eu gosto muito de aprender coisas novas – sentiu suas bochechas arderem.

— Sei, mas tudo bem, pode trazê-lo Marvim.

— Aqui está ele – disse Marvim. Rubo, então, se materializou na frente deles.

— Oi Luca! Oi Túlio! – Rubo exclamou.

— Oi! – Túlio e Luca falaram juntos – tudo bem? – continuou Luca.

— Estou bem sim, mas então, vamos seguir viagem?

— Vamos! – Túlio disse animadamente.

— Então vamos! – falou Marvim – primeiramente, vamos recapitular tudo que sabemos até agora – Abriu a primeira porta – Sabemos que um dos primeiros povos a ter a noção da trigonometria, foram os egípcios.

Luca e Túlio olharam dentro da porta, e viram o Egito, em especial estava lá Hemiunu projetando a pirâmide de Quéops.

— Eu lembro disso! – disse Luca – Hemiunu falou sobre o *seqt*, que é a razão entre o percurso horizontal e a elevação da pirâmide.

— Isso mesmo! Considerando a matemática de hoje, essa seria a *cotangente* do ângulo. Mesmo eles não tendo esse nome, já tinham essa noção. Agora vamos para a segunda porta.

Foram andando e abriram a segunda porta. Lá estava a Mesopotâmia, então Marvim continuou.

— Agora, com os mesopotâmios, eles já tinham a noção, como os gregos, das triplas pitagóricas, que são os números que satisfazem o Teorema de Pitágoras. Além disso, eles tinham interesse no calendário por conta das suas plantações. Eles usavam o sistema sexagesimal, influenciando todos os povos futuros e isso perdura até hoje, como na marcação de tempo, já que uma hora tem sessenta minutos, ou nos ângulos, um grau equivale a sessenta minutos de ângulo. Tudo isso aconteceu, segundo alguns dados, antes de 1500 a.C., estão entendendo?

— Tudo bem até aqui.

— Agora vamos ver a terceira porta.

Na terceira porta estava a Grécia Antiga. Luca reconheceu as pessoas que estavam lá.

— Aqui, primeiro falamos com Tales e Pitágoras. Como você sabe, Tales usava a semelhança de

triângulos, por conta disso foi homenageado batizando o Teorema de Tales. A semelhança de triângulos é a principal propriedade matemática que se aplica na trigonometria.

"O teorema de Pitágoras, também foi uma homenagem a Pitágoras. Antigamente essa propriedade era usada para os problemas de quadratura. Porém hoje é muito usada nos triângulos retângulos, para calcular as medidas de seus lados e simplificando diversas contas na trigonometria."

— Isso é interessante – interpôs Túlio.

— Sim! – concordou Marvim – continuando, além deles, existiram diversos outros matemáticos, como Eratóstenes e Aristarco. Ambos se interessavam por astronomia. Eratóstenes, apenas com uma vareta e com o conhecimento de princípios simples da geometria, conseguiu medir a circunferência da Terra, e isso é lindo, pois com algo simples, ele calculou algo muito complexo. Isso acontece em diversas áreas: às vezes, a solução mais simples e fácil traz resultados melhores e mais rápidos que uma solução extremamente complexa.

"Sobre Aristarco, não temos seu material, foi perdido, porém temos relatos de seu trabalho, e

conseguimos perceber que suas ideias, sobre como calcular a distância da Terra ao Sol, e a distância da Terra à Lua, estavam corretas. Caso ele dispusesse de instrumentos de medidas mais precisos, seus resultados, possivelmente, seriam exatos. Vamos para a próxima porta agora?"

— Podemos ir sim – disse Túlio.

— Já vimos o que ajudou os matemáticos no desenvolvimento da trigonometria. Agora para a próxima porta, veremos os matemáticos que trabalhavam com a trigonometria mais antiga e, também, como ela evoluiu com o passar do tempo.

Indo para a outra porta, viram novamente o Egito. Mas a paisagem estava estranha, parecia que diversas civilizações estavam juntas em um só lugar, e de fato estavam.

— Pode deixar que daqui eu continuo Marvim – disse Rubo, o que deixou Luca feliz. – A trigonometria, como vimos ontem, começou com Hiparco, em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele tinha interesse em catalogar estrelas e para isso media cordas na circunferência e os ângulos correspondentes.

"Depois de 300 anos, aproximadamente, Ptolomeu entra na história. Ele tinha grande interesse na astronomia, catalogar estrelas, estudar o sistema solar, essas coisas. Então ele reuniu todo o seu trabalho e o que sabiam de astronomia, na época, em um livro que ficou conhecido como *Almagesto*. Nele há diversas tabelas astronômicas, estelares, e também tabelas de cordas – mais precisas que as de Hiparco. Essa obra se baseia no chamado Modelo Ptolomaico. Tinha esse nome embora não tenha sido criado por Ptolomeu, pois era uma ideia que os matemáticos e físicos da época já tinham. Nesse modelo afirma-se que o Sol gira em torno da Terra. Claro que isso está errado! Mas os resultados matemáticos de Ptolomeu eram verossímeis e para fazer essas contas usava-se a trigonometria.

"Saindo do Egito, e indo agora para a Índia, aproximadamente em 500 d.C., aqui estava Ariabata, um matemático que tinha interesse em saber a duração do dia e do ano e, para isso, usava a trigonometria. Semelhantemente a Hiparco e a Ptolomeu, media a corda da circunferência e a relacionava com seu ângulo central correspondente, porém com uma diferença: ao invés de medir a corda, ele media a meia corda, que em

hindu, era chamada de *JIVA*. Além disso, ele já usava o que hoje chamamos de cosseno.

"Continuando na nossa linha do tempo, vamos agora para o Império Árabe, mais ou menos entre 900 e 1000 d.C. Um matemático importante para esta história é Al-Battani, que, como Ariabata, mediu a meia corda. Com Al-Battani surgiu o círculo de raio igual a 1, e ele chamava a meia corda de *JIBA*, que nos seus trabalhos era grafada como *JB*. Já vimos ontem que essa nomenclatura causou confusões na hora da sua tradução para o latim.

"Além do Al-Battani, havia outro matemático árabe chamado Abul-Wáfa. Ele também tinha interesse em astronomia e em horóscopos. Ele fazia o horóscopo de pessoas importantes da época e, como podem imaginar, para fazer isso usava a trigonometria. Só que ele criou algo que facilitou diversas contas até nos dias de hoje, a soma de arcos: cos (A + B) e sen (A + B). Além disso, ele usou o que chamamos atualmente de secante e cossecante. Alguma dúvida até aqui?"

— Nenhuma – Luca e Túlio falaram ao mesmo tempo.

— Então vamos continuar nossa história. Agora vamos voltar ao Egito, nos anos 1000 aproximadamente. Lá, um matemático chamado Ibn Yunus descobriu uma propriedade trigonométrica usada pelos astrônomos, em seus cálculos, e que hoje pode ser escrita como:

$$2 \cos (A) \cdot \cos(B) = \cos(A + B) + \cos (A - B)$$

"Antigamente, como vocês podem imaginar, não existia calculadora. Então usavam-se as propriedades trigonométricas para simplificar expressões e realizar cálculos, que hoje utilizamos a calculadora para fazer. Essa propriedade foi usada entre os anos 1000 até 1600. Após isso, os matemáticos começaram a utilizar os logaritmos com essa finalidade. Posso continuar, ou alguém tem algo a perguntar?"

— Pode continuar sim – disse Túlio.

— Agora vamos para a Pérsia, com outros dois matemáticos. Eles não trabalhavam juntos porque um nasceu mais de um século antes do outro, mas quando, na escola, vamos estudar o que eles criaram, aprendemos juntos. O primeiro deles é Nasir al-Tusi, que viveu em 1250, aproximadamente. Ele foi importante por ter criado aquilo que chamamos de Lei

dos Senos. O segundo matemático viveu por volta de 1400, é Jamshid al-Kashi que, como vocês podem imaginar, criou o que chamamos de Lei dos Cossenos. Um dado interessante é que, em alguns países, chamam a lei dos cossenos de *lei de al-Kashi,* em sua homenagem.

— Então, as duas leis não foram criadas juntas? A forma em que aprendi me fez pensar que sim.

— Pelo contrário, uma só surgiu uma centena de anos após a outra. Talvez um autor tenha influenciado o outro. Lembre-se, hoje isso é algo simples, trivial, mas nessa época não era. Podemos dizer que a matemática ainda estava iniciando, comparado ao que ela é hoje.

— Está bem, pode continuar.

— Seguindo, vamos para a Europa, em 1450, aproximadamente, lá está um matemático conhecido por seu apelido, Regiomontanus. Ele percebeu que todos os trabalhos antigos que tratavam sobre astronomia, traziam um estudo matemático interessante e característico do que hoje chamamos de trigonometria. Ele trabalhou sobre o *Almagesto* de Ptolomeu e criou seu próprio livro, no qual separou tudo o que era relacionado a círculos e triângulos, criando um estudo matemático puro, sem se preocupar

com suas aplicações práticas. Estudando o trabalho de Ptolomeu, ele achou estranho que o Sol girasse em torno da Terra, mas não fez nada para mudar essa ideia. Apenas inseriu, em seu trabalho, suspeitas sobre esse modelo.

"Ainda na Europa, mas anos mais tarde, em 1500, aproximadamente, temos Nicolau Copérnico. Possivelmente ele se baseou no material do Regiomontanus, onde ele falava que era estranho que o Sol girasse em torno da Terra, e todos os outros planetas girassem em torno do Sol. Só a Terra seria diferente? Então Copérnico propôs o contrário, e fez cálculos para ver o que mudaria na astronomia da época. Isso o fez perceber que fazia mais sentido a Terra girar em torno do Sol – que é o que de fato acontece – e como podem imaginar, para ele utilizou a trigonometria. Porém, Copérnico deixou esses resultados como hipóteses teóricas. O Modelo Copernicano só foi comprovado muitos anos depois, com Galileu Galilei, que fez observações com o telescópio e demonstrou matematicamente esses resultados.

"Um matemático chamado Rheticus, aluno e auxiliar de Copérnico, interessou-se pela trigonometria e percebeu que, ao invés de trabalhar com a meia corda, usada ainda por influência de Ariabata e de Al-Battani, era possível trabalhar-se com triângulos e com semelhança de triângulos. Esse é o jeito que se vê na escola atualmente: trigonometria trabalhada com triângulos retângulos."

"Passados mais alguns anos, em 1600 um matemático chamado Pitiscus foi influenciado por Rheticus e, assim como Regiomontanus, separou todo o estudo matemático de círculos e triângulos da astronomia, e o nomeou de Trigonometria. A partir de então, os matemáticos não consideraram mais que faziam astronomia, e sim trigonometria. A trigonometria passou a ser um campo novo na matemática, que existe até os dias atuais. Esse é um resumo da história da origem da trigonometria. E tudo começou com um matemático medindo uma corda."

— Isso é sensacional! – exclamou Túlio.

— Achei muito interessante também! – comentou Luca.

— Que bom que gostaram – disse Marvim.

— Mas agora me surgiu uma dúvida – perguntou Túlio – se a trigonometria era usada puramente na astronomia, quando houve a separação, onde começaram a utilizá-la?

— Vamos seguindo nesse corredor e vendo as portas seguintes.

Começaram, então, a andar pelo corredor e as portas estavam abertas. Por elas conseguiam ver diversos matemáticos trabalhando. Então Marvim começou a falar

— Como vocês sabem, Pitiscus fez a separação da Trigonometria em 1600, mas em 1500 ocorreram as grandes navegações da expansão dos reinos europeus. Existiram vários grandes navegadores, como Pedro Álvares Cabral e Cristóvão Colombo. Vou dar ênfase a Pedro Nunes.

"Pedro Nunes foi um matemático português, nomeado como Cosmógrafo-mor de Portugal, que é o cargo mais alto da cosmografia – uma parte da astronomia que se interessa pelo estudo e a descrição do universo, mapeando as características gerais do cosmos, descrevendo o céu e a Terra. Como vocês podem supor, ele fazia mapas de navegação, tinha

interesse em cartografia e seus estudos influenciaram os ingleses na navegação.

"Agora em um outro ramo, em outra porta, podemos ver Brook Taylor. Nascido em 1685, foi um matemático britânico que apresentou uma nova maneira de pensar: ao invés de calcular o seno ou o cosseno de um ângulo medindo lados de triângulos, é possível calculá-los como somas infinitas, que são as chamadas de séries de Taylor. Isso é estudado no ensino superior, mas facilita para os matemáticos a descobrirem quanto vale, por exemplo, o seno de um radiano, um outro tipo de medida para ângulo."

"Outra pessoa que podemos mencionar é o Leonhard Euler, possivelmente vocês já ouviram falar dele. Nasceu em 1707 e deu diversas contribuições à matemática. Uma delas é a que relaciona números imaginários à trigonometria, algo estudado em análise complexa no ensino superior.

"Por último, podemos mencionar Jean Fourier, um matemático e físico francês, que nasceu em 1768, trabalhou com o que chamamos de séries de Fourier. Elas são úteis quando se quer estudar a vibração de uma onda em um instante, ou quando queremos saber a

temperatura exata de um ponto específico de uma chapa que está sendo aquecida. Nas séries de Fourier são usadas as funções trigonométricas. Caso você não as conheça ainda, pode perguntar ao seu professor, Luca.

"Eu poderia citar diversas aplicações para a trigonometria, como na física, quando se estuda dinâmica, para efetuar os cálculos com vetores e em muitas outras ciências. Acho que só com esses exemplos e personalidades históricas que citei, já deu para perceber que a trigonometria é bem útil, e é usada em diversas áreas."

— Isso é realmente sensacional! – disse Luca – e pensar que toda essa parte histórica é excluída quando a estudamos na escola.

— Isso é algo bem triste, mesmo – concordou Rubo.

— Mas algo que vocês não falaram: o que tem atrás de todas essas outras portas? Algumas estão trancadas.

— Em cada uma delas tem uma história diferente, – disse Rubo – não sabemos o que tem atrás das que estão trancadas. Tem algo totalmente novo para a humanidade, que está apenas esperando alguém ir até lá e destrancá-las, criando um conhecimento. E esse

alguém pode ser você, caso queira continuar estudando e descobrindo coisas novas. Em vez de falar sobre a história de matemáticos do passado, atrás daquelas portas, pode ter a sua própria história."

"Nossa viagem acaba aqui. Caso queiram aprender, eu sempre estarei aqui para ajudá-los, sobre trigonometria. Isso não é um fim, é apenas um novo começo para algo totalmente novo."

Então a simulação se encerrou.

FIM